

О напряженном состоянии тонкого диска с учетом зависимости предела текучести от температуры

М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Г. Г. Бердзенишвили, И. И. Переяславская
Воронежский государственный университет

Аннотация: Рассматривается задача определения напряженного и деформированного состояния тонкого кругового диска, проявляющего упругие и пластические свойства при тепловом и силовом воздействиях. В центральной части диска поле температур однородное. На границе диска задано давление и постоянная температура. Выбирается условие пластичности Треска. Учитывается зависимость предела пластичности от температуры. Пластические деформации определяются по теории пластического течения. Установлены условия, позволяющие определять величину температуры центральной части диска и его радиус, в зависимости от которых пластическая область может формироваться в центральной части диска или на его границе. Приведены графики для напряжений. Для верификации полученных результатов предлагается рассматривать графики эквивалентного напряжения для допустимых режимов пластичности и график годографа вектора напряжений.

Ключевые слова: математическое моделирование, упругопластическое тело, плоское напряженное состояние, кусочно-линейные условия пластичности, теория пластического течения, термоупругопластичность.

Математическому моделированию напряженного и деформированного состояния дисков, испытывающих силовое и тепловое воздействия, посвящено значительное количество работ. Практически во всех последних публикациях учитывается зависимость параметров тел от температуры. Отметим работы [1–5], в которых изучаются задачи, близкие к задаче, рассматриваемой в данной статье.

Постановка задачи

Рассматривается тонкий круговой диск, подверженный полярно-симметричному тепловому и силовому воздействиям. Поле температур центральной части диска $0 \leq r \leq a$ является однородным $T = T_a$. На внешней границе диска $r = b$ задано давление p_b и температура $T_b = 0$.

Все величины приводятся к безразмерному виду. В качестве масштаба напряжений выбран предел пластичности k при начальной температуре,

в качестве масштаба длины – радиус a . Для безразмерных величин принято обозначение размерных величин, что не привносит путаницу, поскольку не вводятся безразмерные комплексы.

Для определения напряженного, деформированного и температурного состояния диска выбирается цилиндрическая система координат, ось которой перпендикулярна срединной поверхности диска и является осью симметрии диска. Поле температур определяется по формуле [1]

$$T = T_a f, \quad f = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}, & a \leq r \leq b. \end{cases} \quad (1)$$

Упругое состояние

Обозначим через c_i, c_e радиусы границ области, в которой диск находится в упругом состоянии, через p_i и p_e – давления на этих границах. В этой области компоненты тензора напряжений определяются по формулам [1]:

$$\sigma_r = -\frac{T_a \alpha E}{r^2} \int_{c_{in}}^r f r dr + A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = T_a \alpha E \left(\frac{1}{r^2} \int_{c_{in}}^r f r dr - f \right) + A + \frac{B}{r^2}, \quad (2)$$

$$\text{где } A = \frac{T_a \alpha E}{c_e^2 - c_i^2} \int_{c_i}^{c_e} f r dr + \frac{p_i c_i^2 - p_e c_e^2}{c_e^2 - c_i^2}, \quad B = \frac{c_i^2 T_a \alpha E}{c_e^2 - c_i^2} \int_{c_i}^{c_e} f r dr + \frac{c_i^2 c_e^2 (p_i - p_e)}{c_e^2 - c_i^2},$$

E – модуль Юнга, α – коэффициент линейного теплового расширения.

Упругопластическое состояние диска

Задача плоского напряженного состояния идеального упругопластического тела в области пластического состояния является локально статически определимой. Поэтому, если граничные условия не содержат перемещений, то определение напряжений не зависит от деформированного состояния.

Выберем условие пластичности Треска, в котором учитывается зависимость предела пластичности от температуры. Учитывая, что напряжения $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ являются главными, запишем это условие в виде $\max\{|\sigma_\varphi - \sigma_r|, |\sigma_z - \sigma_r|, |\sigma_\varphi - \sigma_z|\} = k$, $k = k_0(1 - \xi T)$, где k_0 – предел пластичности при $T = 0$, ξ – коэффициент, определяющий зависимость предела пластичности от температуры.

В области $0 \leq r \leq a$ реализуется однородное напряженное состояние $\sigma_r = \sigma_\varphi$, поэтому в этой части диска при переходе в пластическое состояние будет выполняться условие $\sigma_r = \sigma_\varphi = -k$; из формул (2) (полагая $c_i = 0, c_e = b$) следует, что это условие будет выполнено, если

$$T_a = T_i = 2b^2(p_b - k_0) / \left(\alpha E \left(2 \int_0^b f r dr - b^2 \right) - 2b^2 k_0 \xi \right). \quad (3)$$

Для диапазона $k \leq p_b \leq 0$ давления на границе $r = b$ может реализоваться только режим $\sigma_\varphi - \sigma_r = k$. Учитывая (2), находим температуру, при которой на границе $r = b$ будет выполняться этот режим

$$T_a = T_e = (b^2 k_0) / \left(2 \alpha E \int_0^b r f dr \right). \quad (4)$$

Приравнивая правые части (3), (4) и учитывая (1), получим уравнение, позволяющее определить радиус диска $b = b_k$, для которого одновременно на границах $r = a$ и $r = b$ зарождается пластическая область.

Когда $b_k < b$ и $T_a < T_i$, или $b < b_k$ и $T_a < T_e$, диск находится в упругом состоянии; в формулах (2) следует полагать $c_i = 0, c_e = b, p_e = p_b$.

Внутренняя пластическая область

Если $b > b_k$ и $T_{in} < T_a$, то в области диска $0 \leq r \leq a$ реализуется режим полной пластичности: $\sigma_r = \sigma_\varphi = -k_a$, $k_a = k_0(1 - \xi T_a)$. Несложно проверить,

что в области $a \leq r \leq c_i$ из возможных режимов пластичности реализуется режим: $\sigma_\varphi = -k_0(1 - \xi T)$, $-k_0(1 - \xi T_a) \leq \sigma_r \leq 0$, для которого

$$\sigma_r = -k - k_0 \xi T_a (1 - a/r) / \ln(b/a), \quad \sigma_\varphi = -k. \quad (5)$$

Для области $c_i \leq r \leq b$, где диск находится в упругом состоянии, в формулах (2) следует полагать $c_e = b$, $p_e = p_b$. Радиус упругопластической границы $r = c_i$ определяется, например, из условия непрерывности окружного напряжения на этой границе (квадратные скобки используем для обозначения разрыва величин на границах)

$$[\sigma_\varphi] |_{r=c_i} = 0. \quad (6)$$

Из равенств $(\sigma_\varphi - \sigma_r) |_{r=b} = k_0$ и (6), учитывая формулы (2) и (5), определяются значения c_i и температура $T_a = T_1$, при которой на границе $r = b$ зарождается пластическая область.

На рис. 1 приведены графики распределения напряжений, эквивалентного напряжения для возможных режимов пластичности и годографа вектора напряжений, для следующих значений параметров: $a = 1, b = 7, k_0 = 1, p_b = 0, \alpha E = 0.012, T_a = 330, \xi = 0.0008, c_i = 2.1$.

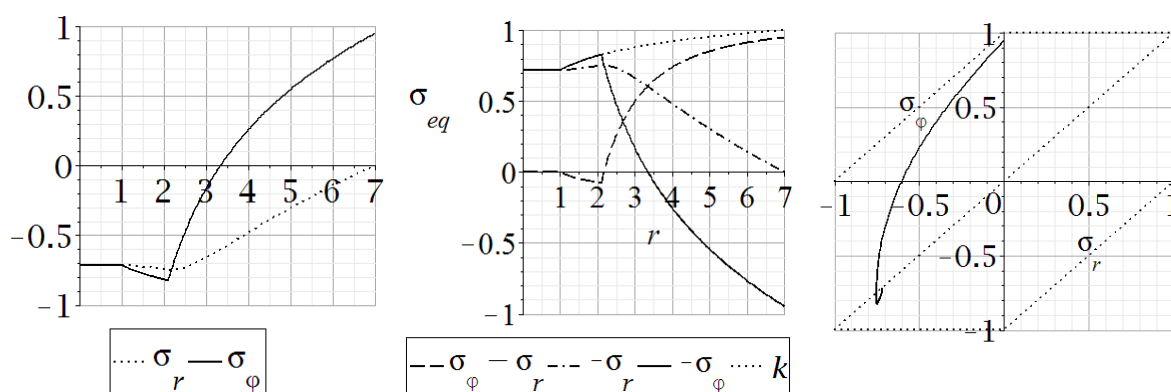


Рис. 1

Деформации

В рамках теории пластического течения для кусочно-линейных функций пластичности определение деформаций в пластической области обсуждалось в работах [8–10], в которых объясняются разрывы радиальной и осевой компонент пластических деформаций.

Две пластические области

Если $T_a > T_1$, $b > b_k$ и $p_b \geq 0$, образуется внешняя пластическая область $c_e \leq r \leq b$, в которой реализуется режим пластичности $\sigma_\varphi - \sigma_r = k$ и

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -p_b + (k + k_0) \ln(r/b)/2, \\ \sigma_\varphi &= -p_b + k_0 + ((k + k_0)/2 + T_a \xi / (\ln b/a)) \ln(r/b).\end{aligned}\quad (7)$$

В области $c_i \leq r \leq c_e$ упругого состояния диска напряжения определяются по формулам (2), в которых величины A, B и c_i, c_e определяются из условия непрерывности напряжений на упругопластических границах $r = c_i$ и $r = c_e$.

Второй сценарий образования пластических областей

В случае, когда $b \leq b_r$, при достижении температуры T_a значения T_e на границе $r = b$ зарождается внешняя пластическая область; при дальнейшем увеличении температуры происходит зарождение и расширение внутренней пластической области. Обозначим через T_2 значение температуры T_a , при которой область диска $0 \leq r \leq a$ переходит в пластическое состояние. В области $c_e \leq r \leq b$ напряжения определяются по формулам (7).

Если $c_i = a$, температура $T_a = T_2$, радиус упругопластической границы $r = c_e$ и величины A, B в формулах (2) определяются из условий непрерывности напряжений на границах $r = a$ и $r = c_e$.

Если $T_a > T_2$, радиус упругопластической границы $c_i > a$. В пластической области $a \leq r \leq c_i$ напряжения определяются по формулам (5). Радиусы упругопластических границ $r = c_i$ и $r = c_e$ определяются из условия непрерывности напряжений на этих границах.

Выводы

В работе показана правомерность использования условия пластичности Треска при решении задачи о тепловом воздействии на диск, когда учитывается зависимость предела пластичности от температуры.

Литература

1. Timoshenko S. R., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970. 506 p.
2. Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Disk // Journal of Thermal Stresses. 1985. V. 8. pp. 41–51.
3. Orcan Y., Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder // Acta Mechanica. 1991. V. 90. pp. 61–80.
4. Dats E., Murashkin E. On Unsteady Heat Effect in Center of the Elastic-Plastic Disk // Lecture Notes in Engineering and Computer Science Ser. “WCE 2016 – World Congress on Engineering 2016”. pp. 69–72.
5. Артемов М. А., Барановский Е. С. Об одном алгоритме решения задач термопластичности // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XIV Международной научной конференции (с. Цей, 3–8 июля 2017 г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2017. С. 137–138.
6. Полетаев Ю. В. Механизм локального разрушения зоны термического влияния сварных соединений при малоцикловом нагружении // Инженерный вестник Дона, 2011. №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/606.



7. Полетаев Ю.В., Полетаев В.Ю. Методика оценки склонности сварных соединений низколегированных сталей к образованию трещин при термической обработке // Инженерный вестник Дона, 2014 №4 URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2583.

8. Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 72–87.

9. Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 71–82.

10. Переяславская И. И., Артемов М. А., Барановский Е. С. К вопросу математического моделирования осесимметричного плоско-напряженного состояния сжимаемого упругопластического тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 1 (31). С. 22–39.

References

1. Timoshenko S. R, Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970. 506 p.
2. Gamer U. Journal of Thermal Stresses. 1985. V. 8. pp. 41-51.
3. Orcan Y., Gamer U. Acta Mechanica. 1991. V. 90. pp. 61-80.
4. Dats E., Murashkin E. Lecture Notes in Engineering and Computer Science. WCE 2016. World Congress on Engineering 2016. pp. 69-72.
5. Artemov M. A., Baranovskii E. S. Vladikavkaz, Southern Mathematical Institute RAS, 2017. pp. 137-138.
6. Poletayev Yu. V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2011, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/606.



7. Poletayev Yu. V., Poletayev V. Yu. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2014, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2583.

8. Artemov M. A., Baranovskii E. S. Proceedings of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Serie: Mechanics. 2015. № 2 (24). pp. 72-87.

9. Artemov M. A., Baranovskii E. S., Yakubenko A. P. Proceedings of Voronezh State University. 2015. № 1. pp. 71-82.

10. Pereyaslavskaya I. I., Artemov M. A., Baranovskii E. S. Proceedings of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Serie: Mechanics. 2017. № 1 (31). pp. 22-36.