

Исследование зависимости погрешности при приближенном решении уравнения Лапласа от среднего минимального синуса угла ячеек расчетной сетки

*Н.В. Клячина, О.Ю. Соловьева, Н.В. Грецова, М.В. Грецов,
О.А. Авдеюк, И.В. Поляков, И.Ю. Королева*

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград

Аннотация: В работе изучается вопрос влияния качества расчетной треугольной сетки на точность вычислений в различных вычислительных задачах. Известен пример Шварца, который показывает, что аппроксимация гладкой поверхности многогранной поверхностью может давать очень большие погрешности для вычисления площади поверхности. Это обусловлено тем, насколько качественной является построенная триангуляция поверхности. Поэтому естественно ожидать, что существует некоторая связь между определенной характеристикой триангуляции и точностью решения некоторой вычислительной задачи. В представленной статье в качестве такой характеристики выбирается величина θ – среднее значение минимального синуса угла всех треугольников расчетной сетки. В процессе численных экспериментов решалась задача Дирихле для уравнения Лапласа в круговом кольце, в которой рассчитывалась погрешность приближенного решения (использовался метод градиентного спуска для поиска решения соответствующей вариационной задачи). Для кольца была построена серия триангуляций с равномерным разбиением по углу и неравномерным разбиением по радиусу в полярных координатах. На данном примере была показана линейная зависимость погрешности от θ . В статье приводятся как результаты вычисления с различными значениями θ , так и вычисление коэффициента корреляции исследуемых величин.

Ключевые слова: краевая задача, триангуляция Делоне, точность вычислений, задача Дирихле, математическое моделирование, треугольная сетка, минимальный угол треугольника, кусочно-линейная аппроксимация, вариационный метод, уравнение Лапласа.

Введение

Часто, при решении соответствующих краевых задач, применяется вариационный метод, основанный на использовании кусочно-полиномиальных функций, заданных над триангулированной областью. Погрешность данного метода зависит от многих параметров: способа выбора интерполяционных многочленов, их степени, качества ячеек расчетной сетки и т.д. Поэтому в настоящее время достаточно много работ посвящено построению триангуляций с заданными границами изменения этих

параметров [1-3], чтобы добиться высокой точности расчетов [4,5]. Однако [6-8], не всегда удается построить такую триангуляцию расчетной области, в которой не было бы «изъянов» в виде почти вырожденных треугольников или тетраэдров (в пространственном случае). Особенно, если расчеты производятся в области сложной геометрической формы.

Построение расчетных сеток является актуальной задачей для различного рода расчетов, применяемых при решении насущных практических задач [9,10] с помощью математического моделирования, соответствующих физических и технологических процессов. Например, в настоящее время широко применяется метод плоской и пространственной триангуляции в различных вычислительных задачах по причине того, что треугольники (тетраэдры) являются простейшими линейными фигурами, геометрические характеристики которых достаточно легко вычисляются и, в тоже время, любая область и даже поверхность аппроксимируются треугольниками с необходимой точностью. Работ, посвященных поиску оптимальных расчетных сеток, достаточно много. В них представлены различные способы улучшения их аппроксимационных свойств. В частности [11,12], применяются отображения канонических областей с заданной в них сеткой (чаще всего четырехугольной), построение триангуляции Делоне (применяется для выпуклых областей) и различных ее обобщений и т. д. [13, 14].

Мы предлагаем использовать подход, заключающийся в том, чтобы получить функциональную зависимость погрешности вычислений от среднего значения минимального угла ячеек сетки, что позволит прогнозировать ошибку расчетов.

Определение характеристики качества триангуляции

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой многоугольник, разбитый на треугольники $T_k, k = 1, \dots, N$. Обозначим через P_1, P_2, \dots, P_m вершины этих треугольников. Введем величины, которые отвечают за качество

треугольной сетки. Пусть треугольник T_k имеет углы $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$. Введем величину:

$$\lambda_k = \min\{\sin\alpha_k, \sin\beta_k, \sin\gamma_k\}$$

Нетрудно заметить, что: $\lambda_k \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ясно, что при $\lambda_k = 0$ все вершины треугольника лежат на одной прямой (вырожденный треугольник). Если $\lambda_k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то треугольник является равносторонним. Зафиксируем число $\delta \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Треугольник T_k будем называть δ -вырожденным, если $\lambda_k < \delta$. Введем характеристику, отвечающую за качество треугольной сетки – среднее значение минимального синуса угла всех треугольников:

$$\theta = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \lambda_k.$$

Приведем следующий пример. Пусть $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Разобьем этот квадрат на $n \cdot m$ прямоугольников вида $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}]$, где $i = 0, \dots, n-1$, $j = 0, \dots, m-1$. В каждом из этих прямоугольников проведем одну диагональ. Получим триангуляцию квадрата Ω . Как нетрудно видеть, для нее получим:

$$\theta = \min \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1}} \right).$$

Отсюда следует, что при $\frac{n}{m} \rightarrow \infty$ величина $\theta \rightarrow 0$.

За равномерность треугольников отвечает разброс величин λ_k относительно среднего значения θ :

$$v = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\lambda_k - \theta)^2.$$

В статье предполагается с помощью экспериментальных исследований установить количественную (функциональную) зависимость погрешности решения вариационных задач от величин θ и v .

Описание решение краевой задачи

Во многих практических задачах в процессе расчета математической модели возникает потребность минимизации некоторого функционала вида:

$$I(u) = \int_{\Omega} G(x, y, u, \nabla u) dx dy, \quad (1)$$

который определен для функций $u \in C^2(\bar{\Omega})$, а подынтегральное выражение G имеет вид:

$$G(x, y, u, \xi, \eta).$$

Например, уравнению минимальной поверхности соответствует функционал площади:

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy. \quad (2)$$

При исследовании капиллярной поверхности, находящейся в равновесии, над областью Ω с заданным углом контакта γ ищется минимум функционала:

$$E(u) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy + \kappa \iint_{\Omega} u^2(x, y) dx dy - \cos \gamma \int_{\partial \Omega} u dS.$$

Часто, при решении соответствующих краевых задач применяется вариационный метод, основанный на использовании кусочно-полиномиальных функций, определенных над триангуляцией области Ω .

В нашей работе в качестве модельной задачи мы рассматриваем краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ при } R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2,$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \text{ при } x^2 + y^2 = R_1^2,$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \text{ при } x^2 + y^2 = R_2^2.$$

Точным ее решением является функция:

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Предположим, что задана триангуляция $\{T_k\}_{k=1}^N$ области Ω . Пусть $h = \max_{1 \leq k \leq N} \text{diam} T_k$ – мелкость разбиения, $u_h(x, y)$ – кусочно-линейное решение рассматриваемой краевой задачи, имеющей точное решение $u(x, y)$. Определим величину:

$$\Delta = \frac{\max_{P_i} |u_h(P_i) - u(P_i)|}{\max_{P_i} |u(P_i)|},$$

Предполагается получение некоторой зависимости значений Δ от характеристики триангуляции θ . Примером может быть формула вида:

$$\Delta \approx \theta^\mu \cdot A + B, \quad (3)$$

где A, B – неизвестные коэффициенты и μ – некоторый подбираемый параметр. Данная формула даст возможность прогнозирования ошибки расчетов в зависимости от качества триангуляции, которая определяется величиной θ .

Для решения краевой задачи нами было проведено построение треугольной сетки кольца (рис.1):

$$\Omega = \{(x, y): R_1 < \sqrt{x^2 + y^2} < R_2\}$$

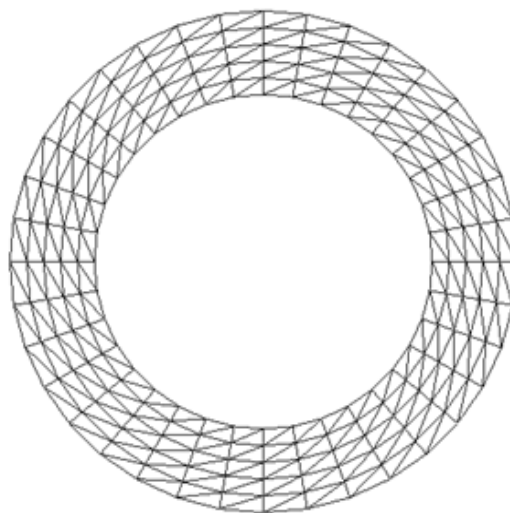


Рис. 1. – Треугольная сетка кольца

Поиск приближенного решения осуществлялся вариационным методом, заключающимся в том, что ищется кусочно-линейная функция $u_h(x, y)$, на которой достигается минимум функционала:

$$I(u) = \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

среди всех кусочно-линейных функций на заданной триангуляции, для которых выполняются краевые условия. При минимизации использовался метод градиентного спуска, в котором новые значения u_i^{q+1} на $(q + 1)$ -ом шаге искомой функции $u_h(x, y)$ во всякой внутренней точке P_i вычисляются по формуле:

$$u_i^{q+1} = u_i^q - \alpha \left[\sum_{T_k^i} (a_k^q (-y_3^k + y_2^k) + b_k^q (-x_2^k + x_3^k)) \right],$$

где α – шаг спуска, (a_k^q, b_k^q) – градиент кусочно линейного приближения в треугольнике T_k^i , найденного на q -ом шаге, $(x_1^k, y_1^k), (x_2^k, y_2^k), (x_3^k, y_3^k)$ – вершины треугольника T_k^i и сумма берется по всем треугольникам T_k^i , окружающим точку P_i .

Результаты численного эксперимента

Для расчетов была взята сетка, полученная делением кольца на 40 равных секторов и неравномерным случайным делением по радиусу на 10 отрезков. Количество итераций в методе градиентного спуска было взято фиксированным и равным 10000. Всего было проведено 62 расчета с разными треугольными сетками. Результаты расчетов приведены в таблице № 1.

Таблица № 1

Результаты численного эксперимента

θ	Δ	θ	Δ
0.286578	0.0205399	0.266952	0.0205344
0.283601	0.0115542	0.24203	0.0311875
0.290603	0.01657	0.247727	0.0275037
0.199357	0.0323594	0.242797	0.0276371
0.25163	0.0124109	0.242686	0.0276002
0.278503	0.0146691	0.243568	0.0278544
0.289087	0.0137027	0.241872	0.0272779
0.292084	0.0126712	0.241873	0.027277
0.289798	0.00865238	0.226762	0.0323841
0.279465	0.0111964	0.278623	0.0205639
0.28291	0.0217982	0.27779	0.0209799
0.285774	0.0112742	0.247149	0.0405068
0.280793	0.0177593	0.237037	0.0480711
0.300071	0.0142468	0.236037	0.0488815
0.283367	0.0111898	0.235372	0.0494273
0.284732	0.0291373	0.266161	0.0230675
0.278035	0.00709622	0.265357	0.0235561
0.293046	0.0118593	0.205165	0.0587115
0.263203	0.0339261	0.207088	0.0556024
0.29346	0.0111633	0.207088	0.0556024
0.28475	0.0194005	0.201443	0.054235
0.256297	0.0127332	0.199501	0.0541017
0.275983	0.0116489	0.198636	0.053857
0.279757	0.0109121	0.193074	0.0522666
0.262431	0.0514676	0.192912	0.0524222
0.278881	0.0115059	0.193398	0.0519563
0.275038	0.0314568	0.196653	0.0489147
0.270104	0.0124882	0.196653	0.0489148
0.282407	0.0144457	0.203238	0.0431614
0.286365	0.0157348	0.201912	0.0442776
0.267819	0.0206403	0.235376	0.0216827

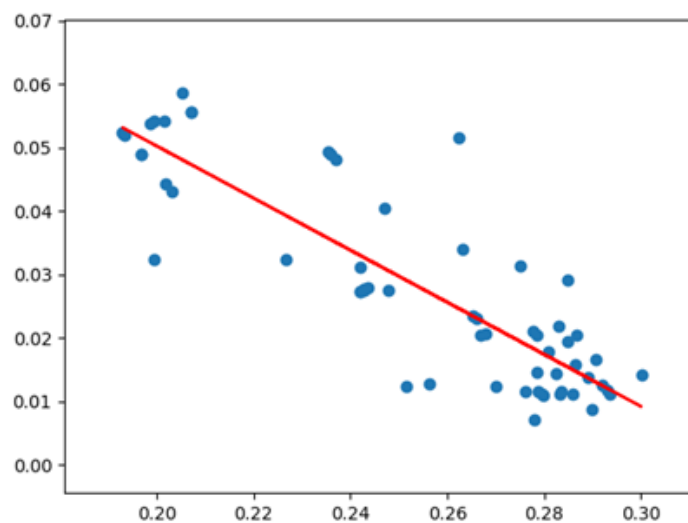
Для определения параметров функциональной зависимости (3) вначале была вычислена матрица коэффициентов корреляции:

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.87003085 \\ -0.87003085 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видим, величины θ и Δ достаточно хорошо коррелируют, о чем говорит близкое к 1 значение элементов матрицы. Это означает, что в формуле (3) мы можем взять $\mu = 1$ (линейная зависимость). Для вычисления коэффициентов линейной регрессии был применен метод наименьших квадратов, который дал следующую зависимость:

$$\Delta = -0.41008 \cdot \theta + 0.13225.$$

На рис.2 иллюстрируется результат всех вычислений, причем синими точками изображены данные из вышеприведенной таблицы № 1, а красным цветом изображен график линейной функции.



Литература

1. Гаранжа В. А. Билипшицевы параметризации негладких поверхностей и построение поверхностных расчетных сеток // Вычислительная математика и математическая физика. 2005. Т. 45. № 8. С.1383-1398.
2. Гаранжа В. А., Капорин И. Е. Регуляризация барьерного вариационного метода построения расчетных сеток // Вычислительная математика и математическая физика. 1999. Т. 39. № 9. С. 1489-1503.
3. Андрекайте А. А. Вариационные методы построения расчетных сеток для конечно-элементных расчетов в много связных областях // Вестник научно-технического развития. 2010. № 8 (36). С.13-20.
4. Караваев А. С., Копысов С. П., Пономарёв А. Б. Алгоритмы построения и перестроения неструктурированных четырехугольных сеток в односвязных областях // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 2. С. 144-150.
5. Гаранжа В. А., Кудрявцева Л. Н. Построение трехмерных сеток Делоне по слабоструктурированным и противоречивым данным // Вычислительная математика и математическая физика. 2012, Т. 52. № 3. С. 499-520.
6. Галанин М. П., Щеглов И. А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. Москва: препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2006. 32 с.
7. Азаренок Б. Н., Чарахчян А. А. Об одной трудности построения двумерных регулярных сеток с помощью отображений // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 12. С. 48-64.
8. Алейников С.М., Седаев А. А. Алгоритм генерации сетки в методе граничных элементов для плоских областей // Математическое моделирование. 1995. № 7(7). С. 81-93.
9. Кудинов Н.В., Болдырева А.А. Выбор шага в задачах динамики пространственно-распределенных объектов на основании спектрального

условия устойчивости // Инженерный вестник Дона. 2008. №2. URL:
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2008/79.

10. Смирнов Р.В., Бахвалов Ю.А. Математическое моделирование теплообменных процессов в энергосберегающих гелиоустановках // Инженерный вестник Дона. 2013. №3. URL:
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1782.

11. Скворцов А. В. Алгоритмы построения триангуляции с ограничениями // Вычислительные методы и программирование. 2002. № 3. С. 82-92.

12. Скворцов А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне // Вычислительные методы и программирование. 2002. № 3. С. 14-39.

13. Heller M. Triangulation algorithms for adaptive terrain modeling // Proc. of the 4th Intern. Symp. on Spatial Data Handling, July 1990. pp. 163–174.

14. Lawson C. Transforming triangulations // Discrete Mathematics. 1972. N. 3. pp. 365–372.

References

1. Garanzha V. A. // Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika. 2005. T. 45. № 8. Pp.1383-1398.

2. Garanzha V. A., Kaporin I. E. Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika. 1999. T. 39. № 9. pp. 1489-1503.

3. Andrekajte A. A. Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitiya. 2010. № 8 (36). pp.13-20.

4. Karavaev A. S., Kopysov S. P. Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred. 2012. T. 5. № 2. pp. 144-150.

5. Garanzha V. A., Kudryavceva L. N. Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika. 2012, T. 52. № 3. pp. 499-520.

6. Galanin M. P., Shcheglov I. A. Razrabotka i realizaciya algoritmov trekhmernoj triangulyacii slozhnyh prostranstvennyh oblastej: pryamye metody [Development and implementation of algorithms for three-dimensional



triangulation of complex spatial regions: direct methods]. Moskva: preprint IPM im. M. V. Keldysha RAN, 2006. 32 p.

7. Azarenok B. N., CHarahch'yan A. A. Matematicheskoe modelirovanie. 2014. T. 26. № 12. pp. 48-64.

8. Alejnikov S.M., Sedaev A. A. Matematicheskoe modelirovanie. 1995. № 7(7). pp. 81-93.

9. Kudinov N.V., Boldyreva A.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2008, № 2. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2008/79.

10. Smirnov R.V., Bahvalov Yu.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, № 3. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1782.

11. Skvorcov A. V. Vychislitel'nye metody i programmirovaniye. 2002. № 3. pp. 82-92.

12. Skvorcov A. V. Vychislitel'nye metody i programmirovaniye. 2002. № 3. pp. 14-39.

13. Heller M. Proc. of the 4th Intern. Symp. on Spatial Data Handling, July 1990. pp. 163–174.

14. Lawson C. Discrete Mathematics. 1972. N. 3. pp. 365–372.