

## Графы с затуханием на дугах и усилением в вершинах и маршрутизация в информационных сетях

*Я.М. Ерусалимский*

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

**Аннотация:** Рассмотрена задача маршрутизации в информационной сети, в которой имеются дуги, не влияющие на качество сигнала – нейтральные, и снижающие качество сигнала – регрессивные, а также вершины, в которых качество сигнала улучшается – активные, и не влияющие на качество сигнала – нейтральные. Задача сводится к нахождению кратчайшего пути на множестве путей, удовлетворяющих дополнительному ограничению – любой отрезок пути заключенный между двумя соседними активными вершинами содержит не более заданного количества регрессивных дуг (это же относится к отрезкам от начала пути до первой активной вершины и от последней активной вершины до конца пути, а также к путям без активных вершин). Для таких графов описано построение развёртки – вспомогательного графа, позволяющего находить решение поставленной задачи с ограничениями на исходном графе как решение соответствующей задачи без ограничений на развертке.

**Ключевые слова:** граф, путь, достижимость, развертка графа, маршрутизация

Информационные сети, особенно глобальные, являются массовыми средствами коммуникации и приобретают всё более универсальный характер – электронная почта, операции с банковскими картами, онлайн сервисы, интернет-магазины и т.д. и т.п.

Задачи маршрутизации в сетях становятся всё более актуальными и нетривиальными [1 – 4]. Обычно, маршрутизация, – определение пути пересылки сообщения или установки соединения, сводится к отысканию кратчайшего пути от адресанта к адресату. Путь на ориентированном графе это такая последовательность дуг, в которой каждая следующая дуга начинается в вершине, в которой заканчивается предыдущая дуга.

Пусть  $x$  и  $y$  такие вершины графа, для которых существует путь с началом в вершине  $x$  и концом в вершине  $y$ . В этом случае говорят, что вершина  $y$  достижима из вершины  $x$ .

Основные прикладные задачи теории графов связаны с достижимостью. Это сама задача о достижимости, задача о нахождении кратчайшего пути. Поточковые задачи и задача о случайных блужданиях по

вершинам графа связаны с достижимостью. Действительно, поток в сети исходно определяется как функция, заданная на его дугах, однако, в эквивалентной формулировке, поток можно определить как функцию, заданную на множестве путей. Процесс случайного блуждания частицы по вершинам графа определяется как переход за один такт из вершины в вершину по дуге, а выбор дуги перехода определяется заданными вероятностями перехода. Если же мы рассмотрим процесс на временном промежутке в  $n$  тактов, то частица окажется в одной из вершин, являющейся концом пути, состоящем из  $n$  дуг.

Эта работа посвящена задаче маршрутизации в информационных сетях. Мы будем заниматься графами с ограничениями на достижимость, которую мы назвали **затуханием на дугах и усилением в вершинах (ЗиУ)**. Эти ограничения могут возникать естественным образом при рассмотрении задач маршрутизации, когда передача информации должна осуществляться по маршруту, который гарантирует её качественную доставку. В этом случае рассматривается не всё множество путей, а некоторое подмножество путей, удовлетворяющих определенным ограничениям. Отличительной особенностью таких задач является неприменимость напрямую алгоритмов и методов, которые «хорошо» работают в общей ситуации (например, алгоритм Дейкстры [5]).

Основным методом, который мы используем для решения задач на графах с ограничениями на достижимость, является метод развёрток. Этот метод основан на построении для графа с ограничениями на достижимость его развертки – вспомогательного графа, на котором можно рассматривать задачи о кратчайших путях, случайных блужданиях и потоковые задачи без ограничений на достижимость, а полученные на развертке решения трактовать как решения исходных задач на графе с ограничением на достижимость.

---

Графы с ограничениями на достижимость сравнительно новые объекты. Первый вид ограничений на достижимость – смешанная достижимость на частично-ориентированных графах был рассмотрен в работах Я.М. Ерусалимскому и Е.О. Басанговой [6,7]. Другие виды ограничений на достижимость на ориентированных графах изучались Я.М. Ерусалимским, Н.Н. Водолазовым, М.В. Кузьминовой, С.Ю. Логвиновым, А.Г. Петросяном, и А.В. Скороходовым [8-12]. В этих работах рассмотрены различные типы ограничений на достижимость. Эти ограничения порождались, как правило, разбиением множества дуг на подмножества и требованиями на формирование последовательности дуг пути. Среди изученных типов или классов ограничений: смешанная, магнитная, вентиляная, барьерная достижимости. Для всех типов достижимости рассматривались задачи о кратчайших путях, случайных блужданиях по допустимым путям и потоковые задачи в сетях с ограничениями на достижимость.

В прикладных задачах ограничения могут возникать не только на порядок прохождения по дугам графа, но и на порядок прохождения по вершинам. Рассмотрение ограничений такого вида естественно и с общенаучной точки зрения, поскольку делает завершенным круг рассматриваемых ограничений.

Рассмотрим граф телекоммуникационной сети. Его вершины соответствуют пунктам приема и передачи информации (узлы связи), дуги этого графа соответствуют каналам связи, по которым передается информация. В процессе передачи информации по каналу связи с сигналом несущим информацию происходят изменения – его качество (уровень) может снижаться. Имеются современные каналы передачи информации (например, оптоволоконные), при передаче сигнала по которым его качество не ухудшается. Это порождает разбиение множества дуг графа на два типа:

---

регрессивные, соответствующие каналам, прохождение сигнала по которым понижает его уровень, и нейтральные дуги, соответствующие каналам, прохождение сигнала по которым не снижает его уровень.

Существующие средства борьбы со снижением уровня сигнала делятся на два типа: пассивные и активные. Пассивные средства – улучшение физических характеристик каналов (замена некачественных каналов на качественные). Активные средства предполагают наличие в сети усилителей, позволяющих поднимать уровень сигнала. Переход с аналоговой техники на цифровую существенно ускорил прогресс в этой области, поскольку цифровой сигнал легче отфильтровать, а затем поднять его уровень без искажений.

Обычно усилители располагаются на узлах связи. Это порождает разбиение вершин графа телекоммуникационной сети на два типа: активные, соответствующие узлам связи, на которых установлены усилители, и нейтральные, соответствующие узлам, на которых отсутствуют усилители.

Таким образом, на нашем графе имеется разбиение множества дуг на регрессивные и нейтральные и разбиение множества вершин на активные и пассивные. Задача выбора оптимальной трассы для передачи информации в этом случае становится нетривиальной, поскольку кратчайшая трасса может оказаться далеко не лучшей. Качество сигнала при прохождении по этой трассе может оказаться неудовлетворительным по своему уровню. Например, если она состоит только из регрессивных дуг, а все вершины, через которые она проходит нейтральные, то сигнал может при прохождении по такой трассе понизиться до недопустимого уровня. Это не позволит отфильтровать его от шума в пункте приема.

Нам необходимо научиться выбирать кратчайший путь из некоторого подмножества путей на графе. Решение этой задачи нельзя свести к задаче

---

нахождения кратчайшего пути на некотором частичном графе исходного графа (например, полученного удалением регрессивных дуг).

Существенным при определении того, какие пути необходимо рассматривать является не то – какие дуги участвуют в его формировании, а какие не участвуют, и не то – через какие вершины проходит путь, а через какие не проходит. Важным является то – в какой комбинации дуги и вершины разных типов участвуют в формировании пути, чтобы он удовлетворял требованиям на качество сигнала.

Будем считать, что допустимый путь на промежутке между двумя активными вершинами содержит не более  $k$  регрессивных дуг (это же касается отрезков от начала пути до первой активной вершины и от последней активной вершины до конца пути, а также всего пути, если на нем нет активных вершин). Такое ограничение на достижимость вершин графа будем называть **достижимостью с затуханием на дугах порядка  $k$  и усилением в вершинах (ЗиУ порядка  $k$ )**. Значение параметра  $k$  определяется требованиями на качество сигнала.

Таким образом, задача о маршрутизации свелась к нахождению кратчайшего пути из вершины в вершину на графе с **ЗиУ порядка  $k$** . Для практического решения этой задачи необходима информация не только о топологии информационной сети, но и о характере дуг (нейтральные и регрессивные) и вершин (нейтральные и активные).

Опишем построение развертки графа  $G(X, U, f)$  (мы пользуемся определением ориентированного графа из [13]). Здесь  $X = X_A \cup X_0$  - множество вершин графа,  $X_A$  - множество активных вершин,  $X_0$  - множество нейтральных вершин,  $U = U_0 \cup U_R$  - множество дуг графа,  $U_R$  - множество регрессивных дуг,  $U_0$  - множество нейтральных дуг,  $f: U \rightarrow X \times X$  -

---

отображение смежности, сопоставляющее каждой дуге графа упорядоченную пару вершин (начало дуги; конец дуги).

Каждой вершине  $x \in X$  поставим в соответствие на развертке  $G'$   $k + 1$  вершину  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ . Опишем, как строятся дуги развертки:

- а) Если  $u \in U_0, f(u) = (x; y), x \in X_0$ , то на развертке  $G'$  этой дуге соответствуют дуги, соединяющие пары вершин  $(x_0; y_0), (x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_k; y_k)$ .
- б) Если  $u \in U_0, f(u) = (x; y), x \in X_A$ , то на развертке  $G'$  этой дуге соответствуют дуги, соединяющие пары вершин  $(x_0; y_0), (x_1; y_0), (x_2; y_0), \dots, (x_k; y_0)$ .
- в) Если  $u \in U_R, f(u) = (x; y), x \in X_0$ , то на развертке  $G'$  этой дуге соответствуют дуги, соединяющие пары вершин  $(x_0; y_1), (x_1; y_2), \dots, (x_{k-1}; y_k)$ .
- д) Если  $u \in U_R, f(u) = (x; y), x \in X_A$ , то на развертке  $G'$  этой дуге соответствуют дуги, соединяющие пары вершин  $(x_0; y_1), (x_1; y_1), \dots, (x_{k-1}; y_1)$ .

Пункт а) означает, что в этом случае качество сигнала сохраняется, б) – качество сигнала восстанавливается до исходного уровня, в) – качество ухудшается на одну ступень, д) – качество восстанавливается до уровня равного 1.

Ясно, что справедливы следующие два утверждения.

**Утверждение 1.** ▼ Задача о достижимости вершины  $y$  из вершины  $x$  на графе  $G(X, U, f)$  с **ЗиУ порядка  $k$**  равносильна задаче о достижимости на его развёртке  $G'$  хотя бы одной из вершин множества  $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$  из вершины  $x$ . ▲

▼ Конструкция развертки гарантирует справедливость этого утверждения. ▲

Если на исходном графе заданы длины дуг, то считаем, что соответствующие им дуги развёртки имеют такую же длину.

**Утверждение 2.** ▼ Задача нахождения кратчайшего пути из вершины  $x$  в вершину  $y$  на графе  $G(X,U,f)$  с **ЗиУ порядка  $k$**  равносильна задаче нахождения кратчайшего пути из вершины  $x$  во множество вершин  $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$  на развёртке  $G'$ . Кратчайший смешанный путь из вершины  $x$  в вершину  $y$  на графе  $G(X,U,f)$  с **ЗиУ порядка  $k$**  может быть однозначно восстановлен по кратчайшему пути из вершины  $x$  во множество вершин  $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$  на развёртке  $G'$ . ▲

Для нахождения кратчайшего пути на развёртке можно применить алгоритм Дейкстры [5, 13] или его модификации.

Рассмотрим граф, изображенный на рис.1. Пунктиром обозначены нейтральные дуги, сплошным – регрессивные дуги, вершины с серой заливкой (8,9,11) – активные, без заливки – нейтральные,  $k = 3$ , длины всех дуг равны 1.

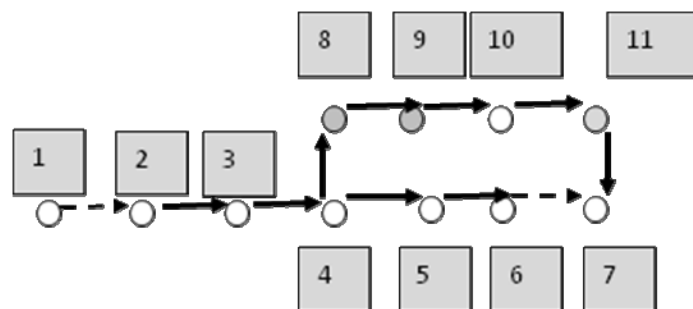


Рис. 1. Граф с затуханием на дугах и усилением в вершинах.

Ясно, что путь  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$  не является допустимым, а путь  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 7$  является допустимым путем из вершины 1 в вершину 7.

Построим развёртку этого графа (см. рис.2).

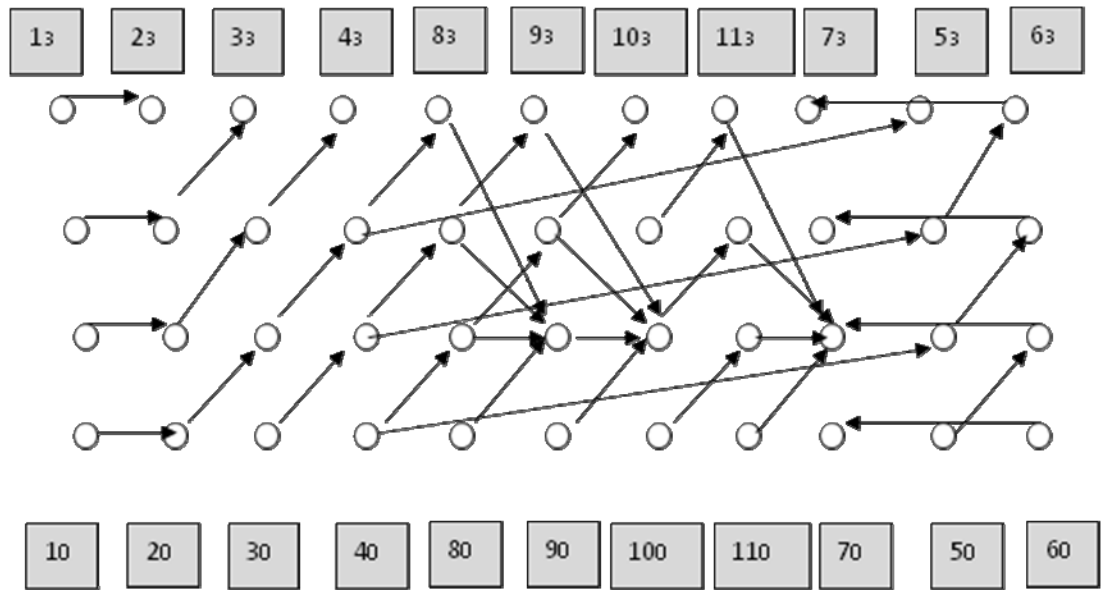


Рис.2. Развертка графа.

Как известно [10], построение развёртки исходного графа позволяет решать не только задачу о кратчайших путях, но и о случайных блужданиях и потоках в сетях с *ЗиУ* по схеме, изложенной в [10].

### Выводы

Мы рассмотрели модельную ситуацию, полагая, что уровень затухания на всех регрессивных дугах одинаков, также мы считали, что усиление сигнала одинаково во всех вершинах, и что любой сигнал с любым допустимым уровнем «поднимается» активной вершиной до начального уровня.

Ограничения на достижимость с условиями затухания-усиления, в которых активными являются дуги, а не вершины рассмотрены в [4].

### Литература

1. А.В. Тихомиров, Е.В. Омелянчук, А.В. Кривошеев. Особенности проектирования систем связи миллиметрового диапазона радиоволн





//«Инженерный вестник Дона», 2012, №2, URL:

ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1742

2. Назарько О.В., Павлов И.В., Чернов А.В. Моделирование оптимальной полосы пропускания телекоммуникационных каналов при условии гарантированной и негарантированной доставки пакетов

//«Инженерный вестник Дона», 2012, №1 URL:

ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/652

3. Ерусалимский Я.М. Графы с ограничениями на достижимость и их приложение к задачам оптимизации технологических процессов //

Современные проблемы науки и образования, 2014, № 6, URL: science-education.ru/120-15477

4. R. Geisberger, P. Sanders, D. Schultes, and D. Delling. Contraction hierarchies: Faster and simpler hierarchical routing in road networks. /WEA, 2008, pp. 319-333.

5. Dijkstra E. W. A note on two problems in connection with graphs. // Numerische Mathematik. V. 1 (1959), pp. 269-271.

6. Басангова Е.О. Различные виды смешанной достижимости / Алгебра и дискретная математика: сб. –Элиста: КГУ, 1985. С.70-75.

7. Ерусалимский Я.М. Эйлеровость графов со смешанной достижимостью // Модели, графы и алгебраические структуры: сб.- Элиста: КГУ, 1989. С.45-48.

8. Водолазов Н.Н. Об особенностях потока в сетях с барьерной достижимостью // Вестник ДГТУ, 2008, Т.8., №2 (37). С.127-136.

9. Ерусалимский Я.М. Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях. / Изв. вузов. Сев-Кав. регион. Естественные науки, 2003, №2. С.3-5.

10. Ерусалимский Я.М. Графы с нестандартной достижимостью. Задачи, приложения: моногр. / Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009. 195с.

11. Ерусалимский Я.М. Некоторые задачи достижимости на графах с ограничениями на прохождения по дугам / Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естественные науки. 1996. № 2. С. 14-17.

12. Ерусалимский Я.М. Достижимость на графах с условиями затухания и усиления // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естественные науки, 2004, спец. выпуск Математика и механика сплошной среды, С. 110-112.

13. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения//10-е изд., М.: Вузовская книга, 2009. 288 с.

### References

1. Tihomirov A.V., Omel'janchuk E.V., Krivosheev A.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №2, URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1742](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1742)

2. Nazar'ko O.V., Pavlov I.V., Chernov A.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №1, URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/652](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/652)

3. Erusalimskiy Ia.M. «Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya», 2014, № 6, URL: [science-education.ru/120-15477](http://science-education.ru/120-15477)

4. R. Geisberger, P. Sanders, D. Schultes, and D. Delling. Contraction hierarchies: Faster and simpler hierarchical routing in road networks. WEA, 2008, pp. 319-333.

5. Dijkstra E. W. A Note on Two Problems in Connection with Graphs. Numerische Mathematik. V. 1 (1959). pp. 269–271.

6. Basangova E.O., Erusalimskiy Ia.M. Algebra i diskretnaja matematika: sb. Jelista: KGU, 1985. pp.70-75.

7. Erusalimskiy Ia.M. Modeli, grafy i algebraicheskie struktury: sb.- Jelista: KGU, 1989, pp.45-48.

8. Vodolazov N.N. Vestnik DGTU, 2008, T.8, №2 (37). pp.127-136.

9. Erusalimskiy Ia.M. Izv. vuzov. Sev-Kav. region. Estestvennye nauki, 2003, №2. pp.3-5.



10. Erusalimskiy Ia.M. Grafy s nestandardnoj dostizhimost'ju. Zadachi, prilozhenija: monogr. [Graphs with non-standard Reachability: Problems and Applications] /Erusalimskiy Ia.M., Skorohodov V.A., Kuz'minova, M.V., Petrosjan A.G. Rostov-na-Donu: JuFU, 2009. 195p.

11. Erusalimskiy Ia.M., Logvinov S. Ju. Izv. vuzov. Sev.-Kav. region. Estestvennye nauki, 1996, № 2. pp.14-17.

12. Erusalimskiy Ia.M. , Skorohodov V.A. Izv. vuzov. Sev.-Kav. region. Estestvennye nauki, 2004, spec.vypusk Matematika i mehanika sploshnoj sredy. pp.110-112.

13. Erusalimskiy Ia.M. Diskretnaja matematika: teorija, zadachi, prilozhenija [Discrete Mathematics: theory, problems, applications] 10-e izd.-M.: Vuzovskaja kniga, 2009. 288 p.