

## О робастности оценки времени релаксации

*П.А. Севостьянов, Т.А. Самойлова, А.А. Белевитин, И.М. Бурдин*

*Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина, Москва*

**Аннотация:** Рассмотрен процесс релаксации волокнистого материала после того, как завершается воздействие нагрузки на него. Построена простая регрессионная модель процесса релаксации в виде суммы экспоненциальных функций, достаточно точно описывающая экспериментальные данные для этого процесса. Показано, что оптимальными являются два слагаемых в этой сумме. Определено, что оценки времени релаксации являются робастными по отношению к распределениям параметров. Построенные модели релаксации дают возможность оценить величину остаточной относительной деформации, соответствующей пластической деформации материала.

**Ключевые слова:** релаксация, деформация, волокнистый материал, робастность, метод Монте-Карло, экспоненциальная модель, регрессия.

Под релаксацией понимают процесс восстановления начального, недеформированного состояния материала после прекращения воздействия на него нагрузки [1, 2]. Динамика этого процесса описывается некоторой монотонно убывающей функцией  $\varepsilon(t)$ . В этой функции  $\varepsilon$  - величина относительной деформации материала к моменту времени  $t$  после снятия нагрузки [3, 4].

Простейшей моделью функции релаксации является экспоненциальная функция  $\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(-s \cdot t)$  [1, 4]. Параметр  $\varepsilon_0$  равен относительной деформации материала в момент прекращения действия нагрузки. Параметр  $s$  определяет скорость деформации. Обратная величина  $T_0 = 1/s$  является основной характеристикой процесса - временем релаксации [5,6]. Процесс релаксации считают завершившимся, если  $\varepsilon \leq 0.01 \varepsilon_0$ . Для экспоненциальной модели получаем время релаксации  $Tr = T_0 \ln 100 \approx 4.6 T_0$ . В этой модели время релаксации прямо пропорционально  $T_0$ .

Заметим, что в измеряемых на опыте значениях величины относительной деформации всегда присутствует остаточная деформация  $\varepsilon_p$ , которая является результатом необратимой, пластической деформации материала под действием нагрузки [7, 8]. При анализе процесса релаксации из общей вели-

---

чины относительной деформации вычитают пластическую составляющую и исследуют только разность  $\varepsilon_r = \varepsilon - \varepsilon_p$ .

Для большинства материалов экспоненциальная функция релаксации не адекватна наблюдаемым в эксперименте результатам измерений кривой релаксации. Как правило, это объясняется сложной структурой материала, которая содержит составляющие его компоненты, имеющие разные скорости релаксации [2, 5, 9]. Для разных составляющих материала значения параметра  $T_0$  отличаются друг от друга. Значение  $Tr$  материала будет зависеть от значения  $T_0$  для компонента и его доли в материале. Поэтому, в качестве более подходящей модели функции релаксации, выбирают сумму убывающих экспонент

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_p + \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \cdot \exp(-s_k \cdot t) \quad (1)$$

Значения  $T_k = 1 / s_k$  образуют спектр времен релаксации отдельных слагаемых. Результатом экспериментов с волокнистым материалом являются двумерные массивы  $D = \{ t(j), \varepsilon(j) \mid j = 1, \dots, n \}$ . Для адекватного описания этих результатов обычно бывает достаточно двух слагаемых в сумме (1). Адекватную оценку параметров  $\varepsilon_k$  и  $s_k$  получают численными методами поиска по критерию наименьших квадратов или другому, более робастному критерию [9, 10].

На рис.1 приведены результаты релаксационного эксперимента (массив данных  $D$  показан маркерами,  $n = 1797$  отсчетов) с образцом войлока и кривые модельных зависимостей (1) с  $N = 1$  и 2, параметры которых оценены по этим данным методом наименьших квадратов:

$$\varepsilon_1(t) = 0.0627 + 0.0109 \cdot \exp(-0.0064 t), \quad R^2 = 0.768, \quad (2)$$

$$\varepsilon_2(t) = 0.0614 + 0.0194 \cdot \exp(-0.088 t) +$$

$$+ 0.00632 \cdot \exp(-0.00165 t), \quad R^2 = 0.961, \quad (3)$$

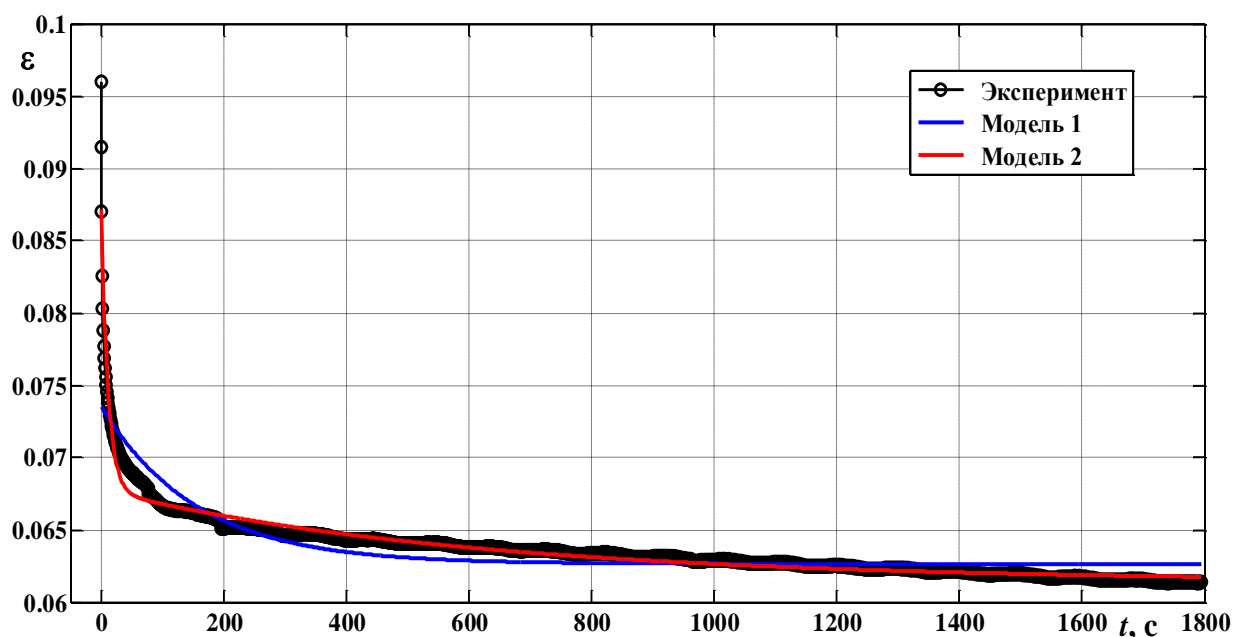


Рис. 1. - Данные: tsec02st, ex02 – 1794 samples

Квадрат коэффициента детерминации  $R^2$  показывает качество подбора регрессионной модели. Модель 1 (регрессия (2)) не адекватна данным D. Модель 2 (регрессия (3)) адекватна экспериментальным данным с высоким значением  $R^2$ . Модели по формуле (1) с  $N > 2$  не увеличивают качества регрессии: новые слагаемые оказываются незначимыми. Модели (1) и (2) содержат практически одинаковую постоянную составляющую  $\sim 0.062$ , которая ассоциируется с пластической составляющей деформации.

Обратим внимание на огромную, более, чем в 50 раз, разницу параметров  $s_1 = 0,0880$  и  $s_2 = 0.00165$  у модели 2. Именно это различие позволило учесть в компактном виде двухкомпонентной модели наблюдаемое в эксперименте быстрое убывание относительной эластической деформации на начальном отрезке времени после снятия нагрузки и весьма медленное убывание эластической деформации в течение длительного срока на завершающем этапе эксперимента [11,12]. Первое слагаемое с экспоненциальной функцией

в модели 2 уточняет наблюдаемое в эксперименте стремительное уменьшение  $\varepsilon_r$  в самом начале процесса релаксации.

В таблице №1 приведены точечные и интервальные оценки для коэффициентов регрессии – параметров модели 2 для доверительной вероятности 0.95.

Таблица № 1

Точечные и интервальные оценки параметров модели 2

Параметр	Точечная оценка	Интервальная оценка	Относительная точность оценки, %
$\varepsilon_p$	0.06124	(0.0613, 0.0615)	0.33
$\varepsilon_1$	0.0194	(0.0190, 0.0198)	4.12
$\varepsilon_2$	0.00632	(0.0062, 0.0064)	3.16
$s_1$	0.0888	(0.0853, 0.0924)	8.00
$s_2$	0.00165	(0.00157, 0.00173)	9.70

Отмеченное большое различие между оценками  $s_1$  и  $s_2$  имеет и свою негативную сторону: абсолютная точность этих оценок различна, что сказывается на точности оценки времени релаксации материала  $Tr$ , которую получаем, как решение уравнения:

$$\varepsilon_r(Tr) = 0.01 \cdot \varepsilon_r(0) \quad \text{или} \quad \varepsilon(Tr) = \varepsilon_p + \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \cdot \exp(-s_k \cdot Tr) = 0.01 \cdot \varepsilon(0) \quad (4)$$

Аналитически трансцендентное уравнение (4) может быть решено лишь приближенно заменой экспонент их разложением в степенной ряд до 2-й степени включительно. Получаемые таким образом решения квадратного уравнения дают громоздкое выражение для  $Tr$  через параметры модели. Исследование чувствительности приближенного решения к вариациям параметров приходится выполнять численным методом. Поэтому целесообразно сразу решать уравнение (4) численно, с использованием метода Монте-Карло и одновременно с анализом чувствительности решения к случайным вариациям параметров [9, 10].

Алгоритм анализа включает следующие шаги: 1) генерация случайных значений параметров модели с учетом их точечных и интервальных оценок (таблица №1); 2) численное решение уравнения (4) для сгенерированных значений параметров средствами системы Matlab; 3) сохранение решения в накопительном массиве решений; 4) повторение пп.1 – 3 до накопления массива решений достаточного объема; 5) вычисление оценки  $Tr$ : ее гистограммы, среднего  $TrSr$ , медианы  $TrMe$ , среднеквадратического отклонения  $STr$ , интердецильного размаха  $WdTr$ , доверительного интервала для среднего ( $LTr$ ,  $UTr$ ).

На рис. 2 показаны гистограммы значений  $Tr$ , полученные с помощью этого алгоритма. Случайные значения параметров для одной выборки значений  $Tr$  распределены равномерно, для второй выборки – по нормальному закону со средними значениями, равными точечным оценкам (таблица №1) и одинаковым для всех параметров коэффициентом вариации  $CV = 10\%$ . Объем каждого накопленного массива  $Tr$  составил 100000 значений.

На рисунке видно, что при равномерном распределении вариаций параметров форма распределения времени релаксации далека от «типовых» модельных распределений. При нормальном распределении вариаций распределение времени релаксации близко по форме к нормальному закону, но имеет заметную положительную асимметрию. Большие объемы данных позволяют считать оценки распределений достаточно точными – их нижняя и верхняя интервальные оценки при доверительной вероятности 0.95 практически совпадают с точечными оценками.

В таблице №2 приведены значения оценок числовых характеристик распределений  $Tr$ . Оценки одноименных числовых характеристик практически одинаковы у обоих распределений.

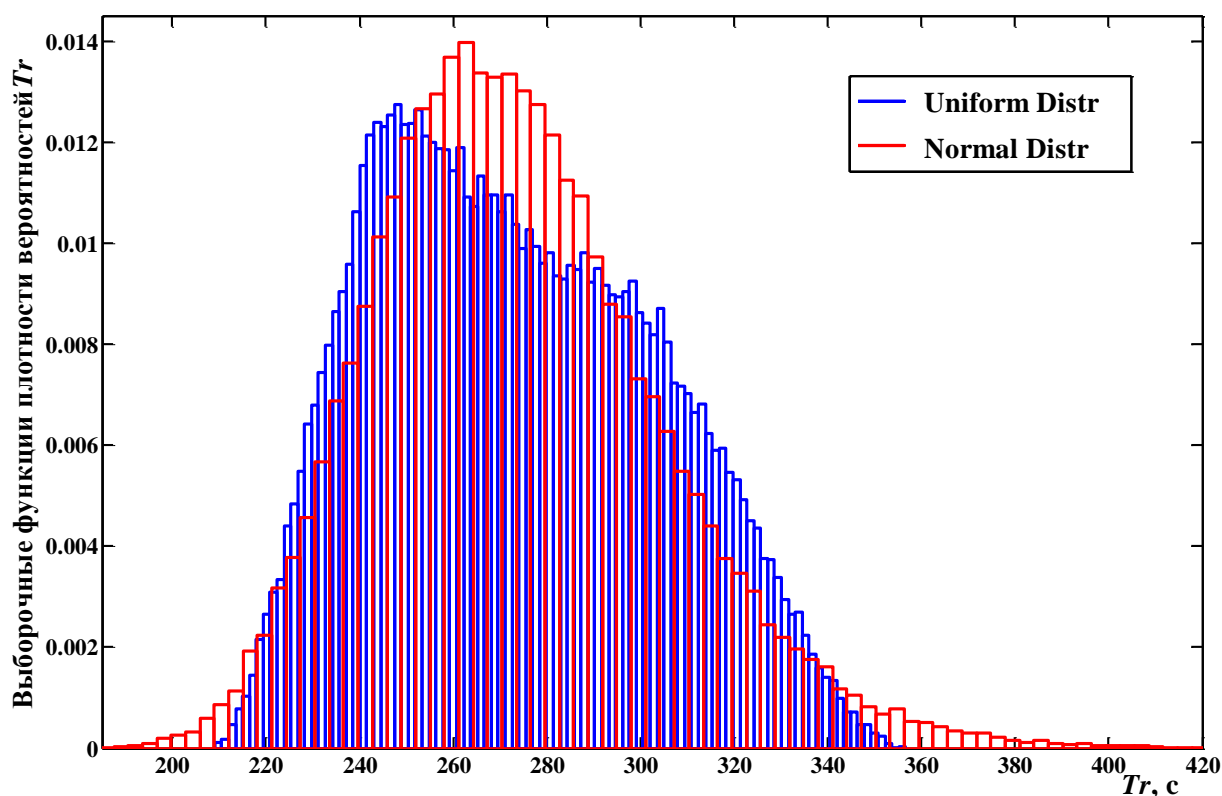


Рис. 2. - Оценки распределения времени релаксации при равномерном и нормальном законах распределения вариаций параметров модели 2.

Интервальные оценки математического ожидания показывают хорошую точность оценивания для обоих распределений.

Таблица № 2

Точечные и интервальные оценки времени релаксации  $Tr$  по модели 2

Оценка	Равномерное распределение параметров	Нормальное распределение параметров
Среднее, $TrSr$	273.19	273.53
Доверительные пределы ( $LTr, UTr$ )	(273.00, 273.37)	(273.34, 273.72)
Медиана, $TrMe$	270.32	270.77
Среднеквадратическое отклонение, $STr$	29.893	30.602
Коэффициент вариации, $CVTr$	10.94%	11.19%
Интердецильный размах, $WdTr$	79.65	76.67

Коэффициенты вариации рассчитанных по модели оценок времени релаксации практически одинаковы с коэффициентом вариации параметров модели 2 релаксации.

### **Выводы**

1. Несмотря на сложные физические явления, приводящие и сопутствующие процессу релаксации волокнистых материалов, экспериментально получаемые данные на продолжительных интервалах этого процесса достаточно точно описываются простыми экспоненциальными моделями с малым числом слагаемых и коэффициентов регрессии.

2. Методом Монте-Карло показано, что оценки времени релаксации по полученной модели являются робастными по отношению к распределениям параметров и одного порядка по точности с оценками параметров модели.

3. Рассмотренные экспоненциальные модели позволяют оценить не только параметры процесса релаксации, но и величину остаточной относительной деформации, соответствующей пластической деформации материала.

### **Литература**

1. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. Москва: Стройиздат, 1968. - 416 с.
2. Бартенев Г.М., Бартенева А. Г. Релаксационные свойства полимеров - Москва: Химия, 1992. - 383 с.
3. Ржаницын А.Р. Строительная механика, 2 изд., перераб. - Москва: Высшая школа, 1991. - 438 с.
4. Соловьев А.Н. Измерения и оценка свойств текстильных материалов. Москва : Легкая индустрия, 1966. - 210 с.
5. Васильев А.А. Оценка и прогнозирование физического износа строительных конструкций, зданий и сооружений. Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2021. - 189 с.

6. Наумкина Ю.В. Прогнозирование значений физического износа многоквартирных домов в течение заданного периода времени. // Инженерный вестник Дона, 2023, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2023/8188](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2023/8188)

7. Кулинич И.И., Языев С.Б., Языева С.Б. К вопросу определения релаксационных констант уравнения связи Максвелла для жестких полимеров в задачах устойчивости // Инженерный вестник Дона, 2012, №3, URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/950](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/950)

8. Комиссаров С.В. Изучение продолжительности процесса растяжения до разрыва. // Инженерный вестник Дона, 2010, №2, URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/192](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/192)

9. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами / под ред. В.Г. Горского. - Москва: Мир, 1973. - 957 с.

10. Севостьянов П.А., Ордов К.В. Основы анализа и моделирования данных в технике и экономике. - Москва: Тисо Принт, 2015. - 409 с.

11. Севостьянов П.А., Белевитин А.А., Бурдин И.М. Марковская модель процессов релаксации и старения волокнистых материалов. // Инженерный вестник Дона, 2010, №2, URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/192](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/192)

12. Sevostyanov P.A., SamoiloVA T.A., Tikhomirova M.L. Dry and Viscous Friction, Statistical Factors, Fluctuation - Dissipation Theorem and Features of their Manifestations in Relaxation of Fibrous Materials // Fibre Chemistry. 2020. Vol. 51. No 6. pp. 449-451.

### References

1. Rzhanicyn A.R. Teoriya polzuchesti [The theory of creep]. Moscow: Strojizdat, 1968, 416 p.
2. Bartenev G.M., Barteneva A. G. Relaksacionnye svojstva polimerov [Relaxation properties of polymers]. Moskva: Himija, 1992, 383 p. 3.



Rzhanicyн A.R. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. Moskva: Vysshaja shkola, 1991, 438 p.

4. Solov'ev A.N. Izmereniya i ocenka svojstv tekstil'nyh materialov [Measurement and evaluation of the properties of textile materials], 2-e izd., pererab. i dop. Moskva: Legkaya industriya, 1966, 210 p.

5. Vasil'ev A.A. Ocenka i prognozirovaniye fizicheskogo iznosa stroitel'nyh konstrukcij, zdaniy i sooruzhenij [Assessment and forecasting of physical wear and tear of building structures, buildings and structures]. Gomel: Belorusskij gosudarstvennyj universitet transporta, 2021, 189 p.

6. Naumkina Ju.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2023, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2023/8188](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2023/8188)

7. Kulinich I.I., YAzyev S.B., YAzyeva S.B. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/950](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/950)

8. Komissarov S.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2010, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/192](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/192)

9. Himmelblau D. Analiz processov statisticheskimi metodam [Process analysis by statistical methods], Moscow: Mir, 1973, 957 p.

10. Sevost'yanov P.A., Ordov K.V. Osnovy analiza i modelirovaniya dannyh v tekhnike i ekonomike. Moscow: Tiso Print, 2015, 409 p.

11. Sevost'janov P.A., Belevitin A.A., Burdin I.M. Inzhenernyj vestnik Dona, 2010, №2. URL: [ivdon.ru /ru/magazine/archive/n2y2010/192](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/192)

12. Sevostyanov P.A., Samoilova T.A., Tikhomirova M.L. Fibre Chemistry. 2020, Vol. 51, No 6, pp. 449-451.