

Математическое моделирование движения планирующего тела сложной конфигурации

Д.В. Беляков, Е.В. Береснева

Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет), г. Москва

Аннотация: В рассматриваемой работе разработана математическая модель движения тела, состоящего из пластинки и стержня, которое можно ассоциировать с парашютом или дельтапланом. Тело совершает плоскопараллельное планирование в квазистатической среде. Получены уравнения движения тела, которые возможно решить только численно. Решены уравнения равновесия и получены основные стационарные режимы движения тела, основным результатом является режим наиболее пологого планирования тела. В системе компьютерной математики MATLAB написан комплекс программ, который ищет численное решение и выводит траектории. Моделируется движение рассматриваемых режимов и оценивается устойчивость основных режимов с помощью численных расчетов.

Ключевые слова: тело, режим планирования, устойчивость, геометрические размеры.

Данная статья посвящена моделированию движения простейшего планирующего тела, имеющего конфигурацию дельтаплана (см. рис.1). Планирующий полет является простейшим режимом в аэродинамике и в природе известно много примеров такого полета. Парящий полет используют крупные птицы, такие, как орел, аист. Пикирующий полет используют хищные птицы, такие, как сокол. Машущий и трепещущий полет тоже очень интересны, но в данной работе рассматриваться не будут. В авиастроении существует проблема имитационного моделирования и обеспечения устойчивости движения летательных аппаратов в воздушном пространстве. Поэтому рассматриваемая нами задача актуальна. Аналогичные задачи рассматривались в [1,2].

Постановка задачи.

Рассмотрим тело, состоящее из стержня и аэродинамического профиля, который отклонен на угол δ относительно нормали (Рис. 1). При формировании аэродинамических сил мы используем гипотезу о квазистатическом обтекании пластинки средой. Аэродинамические силы прилагаются в центре давления, который является неподвижным [3,4]. Аэродинамические силы имеют следующий вид:

$$|\vec{S}_A| = s(\beta + \delta)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\beta + \delta)V_A^2, |\vec{P}_A| = p(\beta + \delta)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\beta + \delta)V_A^2$$

β - угол атаки между вектором (\vec{V}_{Bo}) и воздушными скоростями \vec{V}_B , c_x , c_y - безразмерные аэродинамические функции, ρ - плотность среды, σ - значение площади каждой пластинки. Зависимости c_x, c_y определены из продувок в аэродинамической трубе [5]. В качестве координат, введем угол θ отклонения стержня АВ от оси x.

Уравнения вращения рассматриваемой математической модели будут иметь вид:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= -p(\beta + \delta)V_B r\omega \cos \theta - s(\beta + \delta)V_B(r\omega \sin \theta + V) + mg \cos \gamma \\ mV\dot{\gamma} &= s(\beta + \delta)V_B r\omega \cos \theta - p(\beta + \delta)V_B(r\omega \sin \theta + V) - mg \sin \gamma \\ J\dot{\omega} &= rV_B^2(p(\beta + \delta)\sin \beta - s(\beta + \delta)\cos \beta) \\ \dot{\theta} + \dot{\gamma} &= \omega \\ \dot{x} &= V \cos \gamma \\ \dot{y} &= V \sin \gamma \end{aligned} \tag{1}$$

Величины \vec{V}_B, β связаны с V, θ, ω следующим образом:

$$V_B \sin \beta = V \cos \theta, \quad V_B \cos \beta = r\omega + V \sin \theta \tag{2}$$

Таким образом получена математическая модель (1) – (2), описывающая движение рассматриваемого тела.

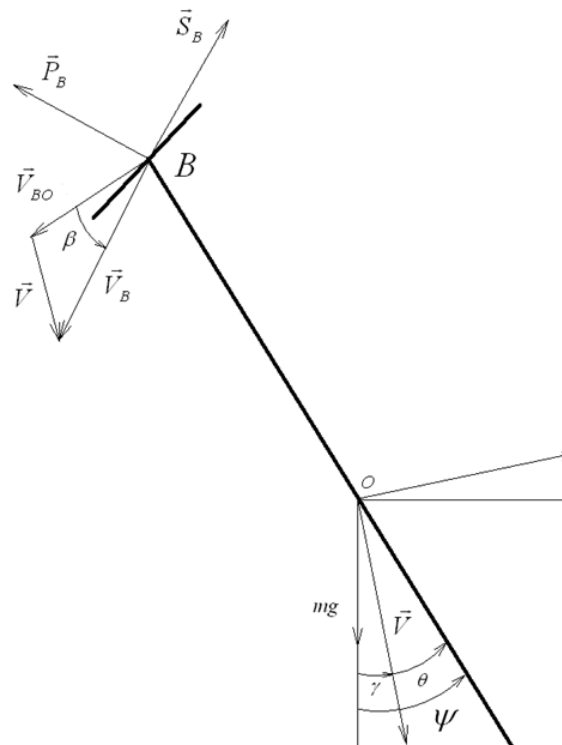


Рис. 1. Рассматриваемое тело

Решение уравнений равновесия

Рассмотрим режимы поступательного движения тела, т.е. $\omega \equiv 0, V \equiv const$.

Тогда: $tg \beta = ctg \theta$, откуда $\beta + \theta = \frac{\pi}{2}$.

Учитывая, что: $\psi = \gamma + \theta$, имеем: $\gamma = \psi + \beta - \frac{\pi}{2}$

Проводя простейшие преобразования, получим уравнение равновесия:

$$ctg(\psi + \beta) = k(\beta + \delta) \quad (3)$$

$k(\beta + \delta) = \frac{c_y(\beta + \delta)}{c_x(\beta + \delta)}$ - функция аэродинамического качества, широко известная

в аэродинамике. Таким образом, при известном установочном угле тела ψ , мы можем решить уравнение равновесия (3) и найти угол атаки β , откуда мы можем определить угол тангажа γ : $\gamma = -arctg(k(\beta + \delta))$ (4)

Скорость планирования V :
$$V = \sqrt{\frac{mg \cos \gamma}{s(\beta + \delta)}} \quad (5)$$

Любому положению тела, можно поставить в соответствие определенный стационарный режим [6]. Приведем наиболее характерные режимы:

- Режим вертикального пикирования: $\gamma_1 = 0, V_1 = \sqrt{\frac{mg}{\rho\sigma c_{x0}}}$
- Режим парашюта: $\gamma_2 = 0, V_2 = \sqrt{\frac{mg}{\rho\sigma c_{xm}}}$
- Режим наиболее пологого планирования:

$$|\gamma_3| = \arctg\left(\frac{1}{2}c'_{y0}\sqrt{\frac{1}{c_{x0}c_{x2}}}\right), V_3 = \sqrt{\frac{mg}{\rho\sigma c_{x0}}\sqrt{\frac{c_{x0}c_{x2}}{4c_{x0}c_{x2} + (c'_{y0})^2}}}$$

Для тела, имеющего прямоугольные пластинки с удлинением $\lambda = 8$, режим наиболее пологого планирования имеет следующие параметры: $|\gamma_3| \approx 87,1353^\circ$, $\psi_3 \approx -0,1153^\circ$, $\alpha_3 \approx 5,0060^\circ$

Численное интегрирование уравнений движения

С помощью математического пакета MATLAB написан комплекс программ, реализующий численное интегрирование уравнений движения рассматриваемого тела. При численном интегрировании используется процедура ode45, реализующая методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка с автоматическим выбором шага. На каждом шаге итерационного процесса из соотношений (2) ищется угол атаки $\text{tg}\beta = \frac{V \cos \theta}{r\omega + V \sin \theta}$ численного решения, аэродинамические функции p, s интерполируются кубическим сплайном. В качестве результатов численного моделирования выводятся фазовые зависимости угловой скорости, скорости планирования и траектории центра масс. Приведем примеры численного моделирования. Аналогичные модели рассматривались в [7], [8].

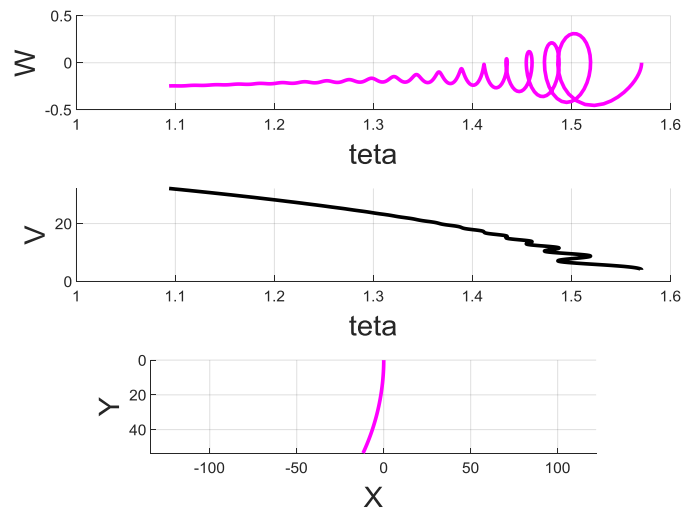


Рис. 3. Режим вертикального пикирования

Численное моделирование, исходя из рисунка 3, показывает, что режим вертикального пикирования неустойчив и траектория уходит со стационарного режима.

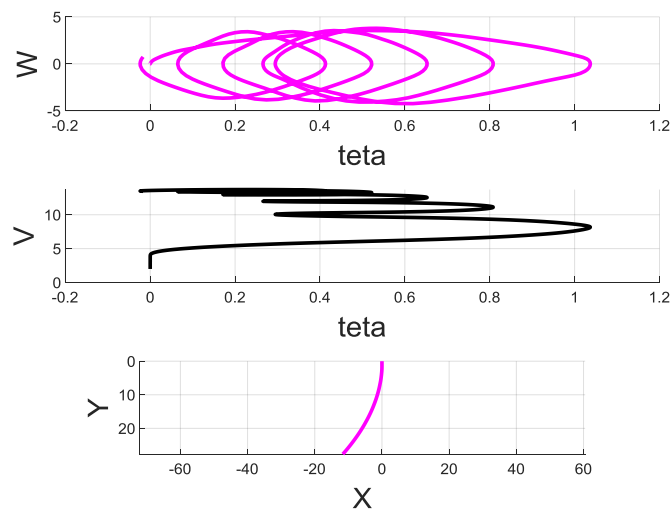


Рис. 4. Режим парашюта

Численное моделирование, исходя из рисунка 4, показывает, что режим парашюта для данного профиля также неустойчив и траектория уходит со стационарного режима.

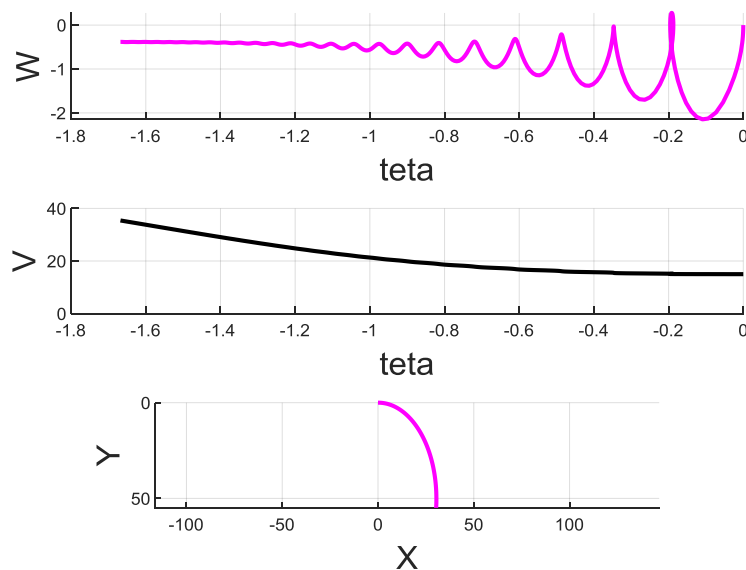


Рис. 5. Режим пологого планирования

Численное моделирование, исходя из рисунка 5, показывает, что тело движется в режиме пологого планирования, теряет скорость и сваливается в режим вертикального спуска. Интересные результаты были получены в [9], [10].

Заключение

1. Создана математическая модель планирующего тела.
2. Указаны наиболее характерные режимы планирования, в том числе, режим наиболее пологого планирования.
3. Создан комплекс программ и проведено имитационное моделирование планирования тела на рассматриваемых режимах.

Литература

1. Беляков Д. В. Разработка и особенности математической модели ветротурбины Дарье. // Международный журнал открытых информационных технологий. 2015. №3. URL: injoit.org/index.php/j1/article/view/226
2. Беляков Д. В. Исследование движения осесимметричного тела в квазистатической среде. // Современные информационные технологии и ИТ образование. 2016 г. №2. URL: sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/82
3. Боголюбов Н. Н. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний Москва: Гостехиздат, 1955. 408 С.
4. Урывская Т. Ю. Устойчивость линейных систем с положительно определенной матрицей // Инженерный вестник Дона, 2017. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4464
5. Табачников В.Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. Москва: Наука, 1974. С. 154.
6. Пшихопов В.Х., Кульченко А.Е., Чуфистов В.М. Моделирование полета одновинтового вертолета под управлением позиционно-траекторного регулятора// Инженерный вестник Дона, 2013. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1650
7. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Модельная задача о флаттере // Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. Москва: Издательство Московского университета., 1992. С. 38.

8. Журавлев В.Ф. Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний Москва: Наука, 1988. 531 С.
9. Vittecoq P. A., Laneville A. V. The Aerodynamic Forces for a Darrieus Rotor with Straight Blades: Wind Tunnel Measurement. // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1983. №15. pp. 406-412.
10. Parashivoiu I Aerodynamics Loads and and performance of the Darrieus Rotor // Journal of Energy. 1982. №6. pp. 315-321.

References

1. Belyakov D. V. Mezhdunarodnyj zhurnal otkrytyh informacionnyh tekhnologij. 2015. №3. URL:injoit.org/index.php/j1/article/view/226
2. Belyakov D. V. Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT obrazovanie. 2016. №2. URL:sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/82Belyakov D. V. Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT obrazovanie. 2016 g. №2
3. Bogolyubov N. N. Mitropol'skij YU. A. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations] Moskva: Gostekhizdat, 1955. 408 P.
4. Ury`vskaya T. Yu. Inzhenernyj vestnik Dona. №4. URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4464>
5. Tabachnikov V.G. Stacionarny`e xarakteristiki kry`l`ev na малы`x skorostyax vo vsem diapazone uglov ataki [Stationary characteristics of wings at low speeds over the entire range of angles of attack]. Trudy` CzAGI. Moskva: Nauka, 1974. P. 154.
6. Pshixopov V.X., Kul`chenko A.E., Chufistov V.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1650



7. Lokshin B.Ya. , Privalov V.A., Samsonov V.A. Model'naya zadacha o flattere [model problem about flutter]. Vvedenie v zadachu o dvizhenii tochki i tela v coprotivlyayushhejsya srede. Moskva: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1992. P. 38.
8. ZHuravlev V.F. Klimov D.M. Prikladnye metody v teorii kolebanij [Applied methods in the theory of oscillations] Moskva: Nauka, 1988. P. 531.
9. Vittecoq P. A., Laneville A. V. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1983. №15. pp. 406-412.
10. Parashivoiu I. Journal of Energy. 1982. №6. pp. 315-321.

Дата поступления: 13.01.2024

Дата публикации: 4.03.2024