

Геометрический анализ областей неоднозначности угла атаки в задаче о движении аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды

Д.В. Беляков

Московский Авиационный Институт

(Национальный Исследовательский Университет), г. Москва

Аннотация: В данной работе рассматривается математическое моделирование движения тела сложной конфигурации в потоке среды с подвижным центром давления. В некоторых задачах это тело называют аэродинамическим маятником. Составлены уравнения движения аэродинамического маятника и проведен переход к новым безразмерным переменным. В уравнения движения входят экспериментальные аэродинамические функции, поэтому систему можно решить только численно. На каждом шаге при численном интегрировании системы уравнений движения, решается алгебраическое нелинейное уравнение, зависящее от фазовых переменных. В фазовом пространстве существуют такие области, в которых существует ровно по три решения. В компьютерной системе Matlab написана программа, которая строит огибающие для границ областей неоднозначности с помощью многократного решения алгебраических нелинейных уравнений, содержащих фазовые переменные. Проведен геометрический анализ полученных многообразий при различных значениях фазовых переменных. Таким образом, рассмотрена задача, нетривиальная с точки зрения теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Тело, область неоднозначности, огибающие, точки возврата.

Данная статья посвящена задаче о различных колебаниях аэродинамического маятника в воздушном потоке, существованию и построению областей неоднозначности, которые можно построить только численно. В предыдущих работах [1,2] рассматривалась аналогичная задача, были численно решены уравнения равновесия и проведен анализ стационарных точек. Далее для каждой точки была найдена система уравнений первого приближения и с помощью критерия Гурвица построены области устойчивости. Доказано, что каждая стационарная точка не входит в область неоднозначности. Был проведен параметрический анализ областей в зависимости от размеров тела. Была показана работа комплекса программ, когда сначала строится область устойчивости, вводятся начальные условия и потом изображается фазовая кривая.

Таким образом, рассмотрена интересная задача, в которой существует нарушение единственности решения, что более понятно, с точки зрения механической интерпретации, но нетривиально с точки зрения общей теории решения дифференциальных уравнений.

Постановка задачи.

Рассмотрим задачу об аэродинамическом маятнике, закрепленный в центре масс с помощью обычной и спиральной пружины. Он совершает колебания под действием воздушного потока [3,4] (см. рисунок 1). Пусть силы упругости зависят от отклонений линейным образом и имеют вид:
 $F = -kx$, $M = -c\vartheta$.

Аэродинамические силы имеют квадратичную зависимость от воздушной скорости:

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha)V_A^2$$
$$|\vec{P}_A| = p(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha)V_A^2$$

здесь α - угол атаки между вектором \vec{V}_A и пластинкой p, s - аэродинамические функции углов атаки, c_x, c_y - безразмерные аэродинамические функции, ρ - плотность воздуха, σ - площадь одной пластинки. Вид аэродинамических функций приводится в [5]. Сдвиг центра давления описывается функцией $l(\alpha)$, которая описывает расстояние между центром давления A и центром пластинки G . $l(\alpha)$ определена из продувок прямоугольных пластинок в аэродинамической трубе [5]. Составим уравнения движения. Позиционными координатами будем считать координату y центра масс тела и угол ϑ отклонения пластинки от горизонтали.

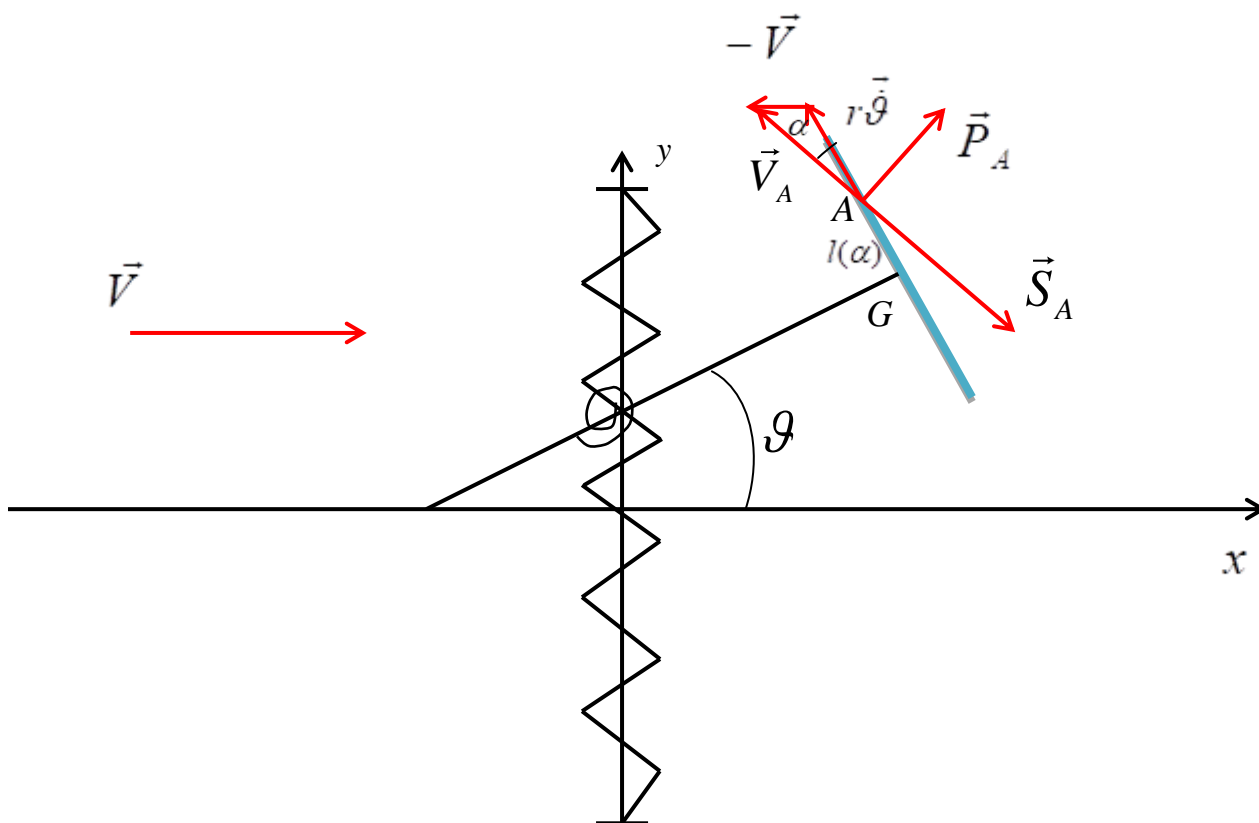


Рис. 1. Колебания тела сложной конфигурации в потоке среды

Тогда уравнения движения маятника можно записать в виде:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= s(\alpha)V_A(l(\alpha)\dot{\vartheta}\sin\vartheta - r\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{y}) - p(\alpha)V_A(r\dot{\vartheta}\sin\vartheta + l(\alpha)\dot{\vartheta}\cos\vartheta + V) - ky \\ J\ddot{\vartheta} &= rV_A^2\tau(\alpha) - l(\alpha)V_A^2n(\alpha) - c\vartheta \end{aligned} \quad (1)$$

Где:

$$\tau(\alpha) = p(\alpha)\sin\alpha - s(\alpha)\cos\alpha$$

$$n(\alpha) = p(\alpha)\cos\alpha + s(\alpha)\sin\alpha$$

аэродинамические функции нормальной и касательной сил.

Напишем кинематические соотношения, связывающие угол атаки, с позиционными координатами:

$$\begin{aligned} V_A \sin\alpha &= l(\alpha)\dot{\vartheta} - \dot{y}\sin\vartheta + V\cos\vartheta \\ V_A \cos\alpha &= r\dot{\vartheta} + \dot{y}\cos\vartheta + V\sin\vartheta \end{aligned} \quad (2)$$

Получим математическую модель колебаний маятника (1)-(2)

Перейдем к безразмерным переменным:

$$Y = \frac{y}{b}, \quad \tau = \frac{V}{b}t, \quad \Omega = \frac{b\dot{\vartheta}}{V}, \quad U = \frac{V_A}{V}, \quad M = \frac{mb}{0.5\rho\sigma}, \quad K = \frac{kb}{0.5\rho\sigma V^2}, \quad C = \frac{c}{0.5\rho\sigma V^2}$$

$$I = \frac{J}{0.5\rho\sigma b}, \quad \varepsilon(\alpha) = \frac{l(\alpha)}{b}, \quad R = \frac{r}{b}$$

При переходе к безразмерным переменным система (1) запишется в виде (3):

$$\begin{aligned} M\ddot{Y} &= c_x(\alpha)U(R\Omega \cos \vartheta + \Omega\varepsilon(\alpha) \sin \vartheta - \dot{Y}) + c_y(\alpha)U(R\Omega \sin \vartheta + \Omega\varepsilon(\alpha) \cos \vartheta + 1) - KY \\ I\ddot{\vartheta} &= U^2(Rc_\tau(\alpha) - \varepsilon(\alpha)c_n(\alpha)) - C\vartheta \end{aligned} \quad (3)$$

$c_n(\alpha)$, $c_\tau(\alpha)$ безразмерные аэродинамические функции касательной и нормальной составляющей.

кинематические соотношения (2) преобразуются так:

$$\begin{aligned} U \sin \alpha &= \varepsilon(\alpha)\Omega - \dot{Y} \sin \vartheta + \cos \vartheta \\ U \cos \alpha &= R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta \end{aligned} \quad (4)$$

Математическая модель колебаний маятника в безразмерных переменных имеет вид (3)-(4)

Неоднозначность определения угла атаки

При численном интегрировании надо определить угол атаки из кинематических соотношений (4). При этом происходит нарушение однозначности решения при определении угла атаки при некоторых значениях ϑ, Ω . Интересные результаты получены в [6]. В процессе численного интегрирования уравнений движения, определение угла атаки на каждом шаге сводится к решению нелинейного уравнения (5) при различных значениях фазовых переменных $\dot{Y}, \vartheta, \Omega$ и построению поверхности $\alpha = \alpha(\vartheta, \Omega)$.

$$(R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta) \operatorname{tg} \alpha - \dot{Y} \cos \vartheta - \sin \vartheta = \varepsilon(\alpha)\Omega \quad (5)$$

Попытаемся оценить размеры границ для указанных областей.

Нелинейной системе двух уравнений (6), заданной в параметрической форме удовлетворяет любая точка (ϑ, Ω) , лежащая на этой области.

$$\begin{cases} (R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta) \operatorname{tg} \alpha - \dot{Y} \cos \vartheta - \sin \vartheta = \varepsilon(\alpha) \Omega \\ \frac{R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta}{\cos^2 \alpha} = \varepsilon'(\alpha) \Omega \end{cases} \quad (6)$$

Чтобы построить огибающие к каждой поверхности, нужно найти особые точки, в которых искомая поверхность приходит к однозначному виду (точки возврата). Дифференцируем второе уравнение (6) во второй раз и получим:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha (R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta)}{\cos^2 \alpha} = \varepsilon''(\alpha) \Omega, \text{ и можно записать уравнение (7), зависящее}$$

только от α :

$$2 \operatorname{tg} \alpha \varepsilon'(\alpha) = \varepsilon''(\alpha) \quad (7)$$

Проинтегрируем его с начальными условиями $\varepsilon(\alpha_i) = \varepsilon_i, \varepsilon'(\alpha_i) = \varepsilon_i^1$ на сетке

$$\alpha_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Окончательно получим для определения особых точек α нелинейное уравнение (8):

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_i^1 \cos^2 \alpha_i (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_i) + \varepsilon_i \quad (8)$$

Задавая начальные условия в случае $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, мы можем найти приближенное решение с помощью встроенных функций системы matlab решить уравнение (8), (см. рис. 2) и найти точки возврата. После этого задаем начальные условия для системы (7), для точки возврата $\alpha = \alpha_*$ на плоскости (ϑ, Ω) и ищем оба ее решения средствами matlab при фиксированном \dot{Y} . Пробегая все значения $\alpha_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, при $\dot{Y} = 9$, мы

получим две замкнутые кривые, напоминающие трехконечную звезду, изображенные для случаев $\vartheta > 0, \Omega > 0, \dot{Y} > 0$ и $\vartheta < 0, \Omega < 0, \dot{Y} > 0$ на рисунке 3 и две области в пространстве $\vartheta, \Omega, \dot{Y}$, в случае $\vartheta > 0, \Omega > 0, \dot{Y} > 0$ и $\vartheta < 0, \Omega < 0, \dot{Y} > 0$, при $1 \leq \dot{Y} \leq 9$, изображенные на рисунках 4 и 5. Внутри них нелинейное уравнение (5) имеет ровно по 3 решения.

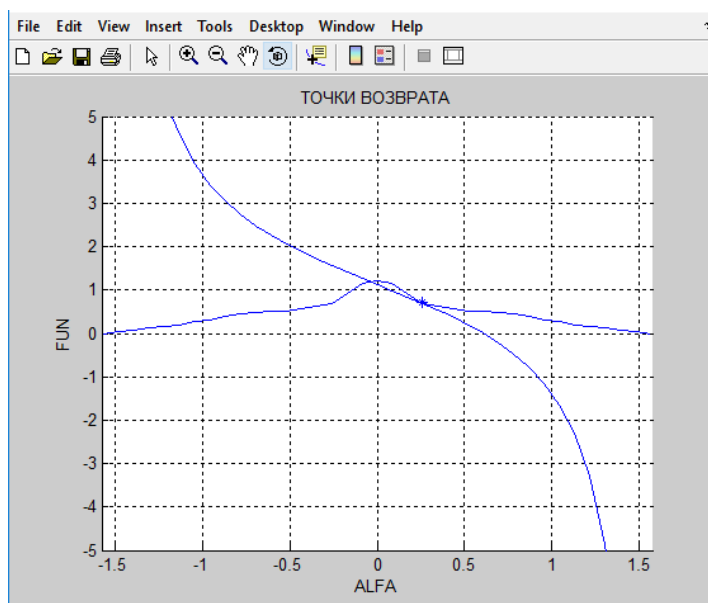


Рис. 2. Решение нелинейного уравнения (8) в случае $\alpha = 20^0$

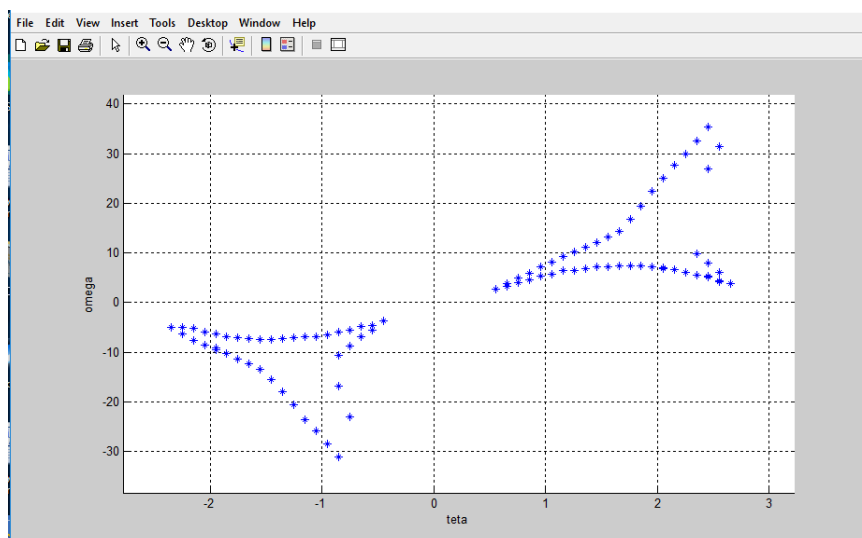


Рис. 3 Огибающие для областей неоднозначности в случае $\sigma = 0.5, b = 0.25, R = 0.2, \dot{Y} = 9$

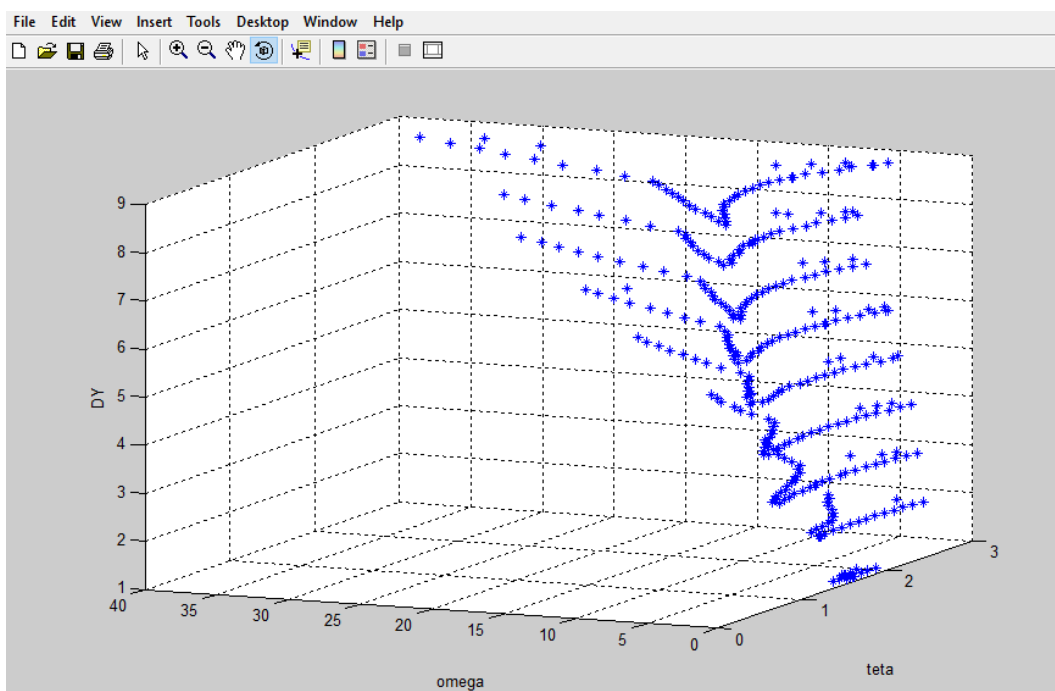


Рис. 4. Линии уровней для областей неоднозначности в случае $1 \leq \dot{Y} \leq 9, \vartheta > 0, \Omega > 0$

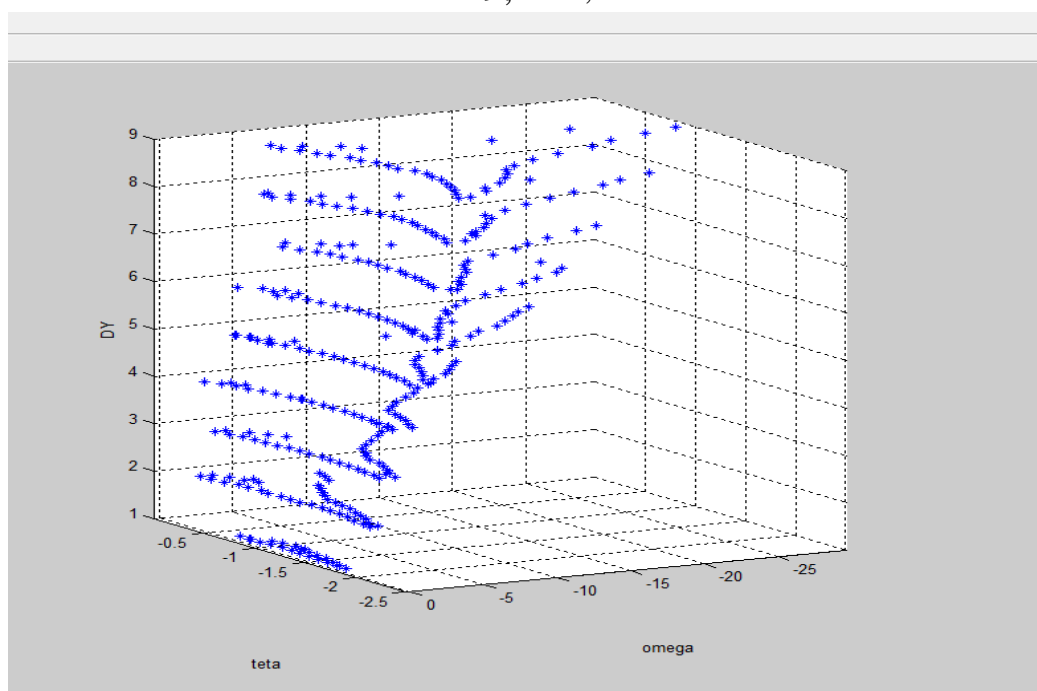


Рис. 5. Линии уровней для областей неоднозначности в случае $1 \leq \dot{Y} \leq 9, \vartheta < 0, \Omega < 0$

Далее аналогично исследуем две области в случаях $\vartheta > 0, \Omega < 0, \dot{Y} < 0$ и $\vartheta < 0, \Omega > 0, \dot{Y} < 0$ (см. рис 6,7) и получим очень похожую картину. Мы видим, что в обоих случаях огибающие при уменьшении абсолютного значения \dot{Y} уменьшаются и исчезают, примыкая к плоскости $\dot{Y} = 0$.

Хотелось бы понять, каким образом можно продолжить решение и как отыскать нужную ветвь, и вообще с помощью какого алгоритма можно сохранить непрерывность угла атаки при заходе траектории в область неоднозначности. Аналогичные задачи и алгоритмы рассматривались в работах [7-9]

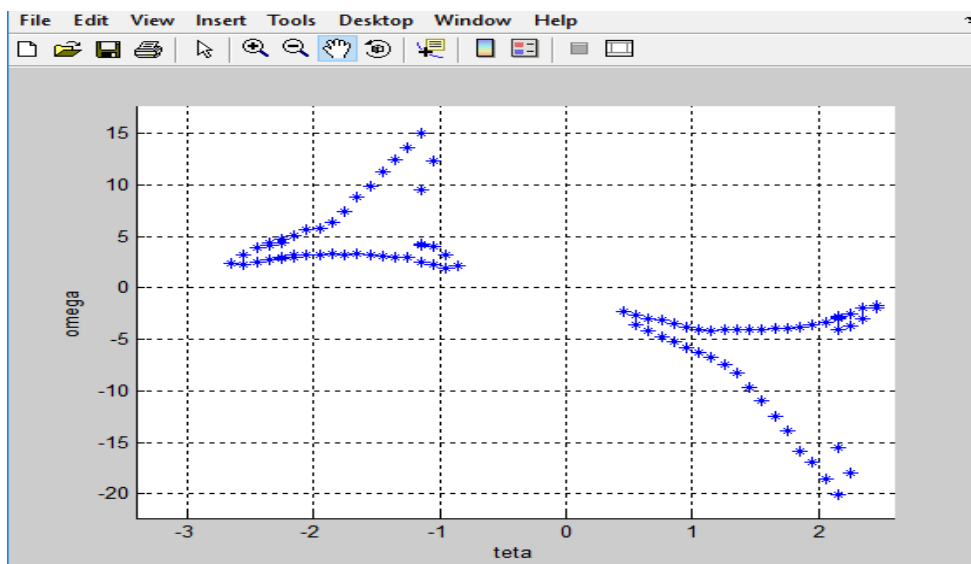


Рис. 6. Огибающие для областей неоднозначности в случае $\sigma = 0.5, b = 0.25, R = 0.2, \dot{Y} = -4$

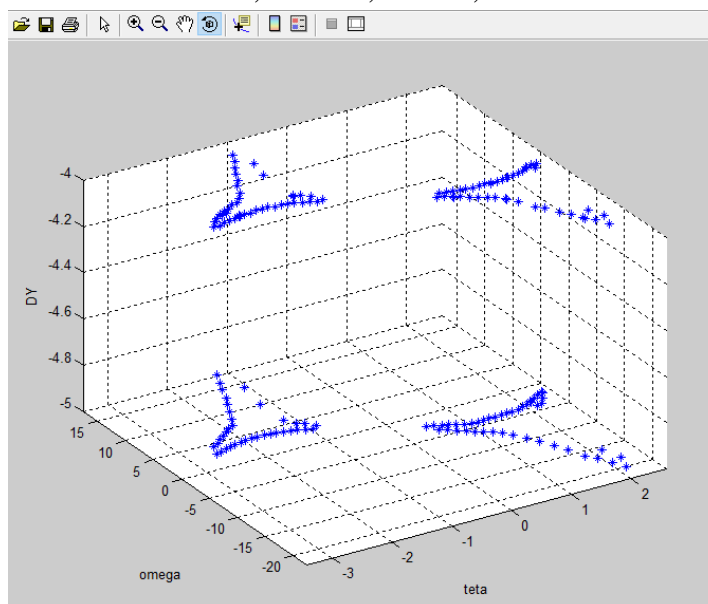


Рис. 7. Линии уровней для областей неоднозначности в случае $4 \leq \dot{Y} \leq 5$, $\vartheta < 0, \Omega > 0$ и $\vartheta > 0, \Omega < 0$

Выводы.

Таким образом, в работе, создана математическая модель колебаний аэродинамического маятника в безразмерной форме, показано нарушение единственности при определении угла атаки, найдены различные множества сингулярных точек, изображены области неоднозначности в пространстве фазовых переменных $\vartheta, \Omega, \dot{\vartheta}$,. Аналогичная задача также рассматривалась в работе [10].

Литература

1. Самсонов В. А. Беляков Д. В. Геометрический анализ при исследовании колебаний тела сложной конфигурации в потоке среды. // Международный журнал открытых информационных технологий. 2019. №9. URL: injoit.org/index.php/j1/article/view/790
2. Беляков Д. В. Задача об исследовании автоколебаний аэродинамического маятника в потоке среды. // Современные информационные технологии и ИТ образование. 2020. №3. URL: sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/659
3. Беляков Д. В. Устойчивость различных стационарных точек при малых колебаниях аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды // Современные информационные технологии и ИТ образование. 2021. №4. URL: sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/808
4. Урывская Т. Ю. Устойчивость линейных систем с положительно определенной матрицей // Инженерный вестник Дона. 2017. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4464

5. Табачников В.Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. Москва: Наука, 1974. С. 154.
6. Пшихопов В.Х., Кульченко А.Е., Чуфистов В.М. Моделирование полета одновинтового вертолета под управлением позиционно-траекторного регулятора // Инженерный вестник Дона, 2013. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1650
7. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Модельная задача о флаттере // Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. Москва: Издательство Московского университета. 1992. С. 38.
8. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966. 531 С.
9. Vittecoq P. A., Laneville A. V. The Aerodynamic Forces for a Darrieus Rotor with Straight Blades: Wind Tunnel Measurement. // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1983. №15. pp. 406-412.
10. Parashivoiu I Aerodynamics Loads and and performance of the Darrieus Rotor // Journal of Energy. 1982. №6. pp. 315-321.

References

1. Samsonov V. A. Belyakov D. V. Mezhdunarodny`j zhurnal otkry`ty`x informacionny`x texnologij. 2019. №9. URL: injoit.org/index.php/j1/article/view/790
 2. Belyakov D. V. Sovremenny`e informacionny`e texnologii i IT obrazovanie. 2020. №3. URL: sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/659
-

3. Belyakov D. V. Sovremennyye informacionny`e texnologii i IT obrazovanie. 2021. №4. URL: sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/808
4. Ury`vskaya T. Yu. Inzenernyj vestnik Dona. №4. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4464>
5. Tabachnikov V.G. Stacionarnyye xarakteristiki kry`l`ev na малы`x skorostyax vo vsem diapazone uglov ataki [Stationary characteristics of wings at low speeds over the entire range of angles of attack]. Trudy` CzAGI . Moskva: Nauka, 1974. p. 154.
6. Pshixopov V.X., Kul`chenko A.E., Chufistov V.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1650
7. Lokshin B.Ya. , Privalov V.A., Samsonov V.A. Model`naya zadacha o flattere [Model problem about flutter]. Vvedenie v zadachu o dvizhenii toчки i tela v coprotivlyayushhejsya srede. Moskva: Izdatel`stvo Moskovskogo universiteta, 1992. p. 38.
8. Malkin I.G. Teoriya ustojchivosti dvizheniya [motion stability theory]. Moskva: Nauka, 1966. 531 p.
9. Vittecoq P. A., Laneville A. V. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1983. №15. pp. 406-412.
10. Parashivoiu I. Journal of Energy. 1982. №6. pp. 315-321.