О колебаниях неоднородных балок

Б.В. Гусев[1], *В.В. Саурин*[2]

[1] *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Российский университет транспорта (МИИТ)", Москва*
[2] *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва*

Аннотация: Проведен анализ публикаций и полученных результатов в области динамического поведения неоднородных балок и стержней по материалам зарубежной печати. Работа состоит из введения и шести разделов. Во введении обсуждается актуальность вопросов, связанных с изучением колебаний неоднородных балок. Вторая часть посвящена освещению достижений в области разработки и применению аналитических методов и подходов. Следующий параграф касается различных аспектов, отражающих разнообразие динамических явлений, возникающих в геометрически неоднородных балочных конструкциях. Обсуждаются результаты, связанные с моделированием конических, ступенчатых балок и стержней, имеющих различные типы геометрических особенностей. В четвертом разделе обсуждается современное состояние вопросов в области решения динамических задач для физически неоднородных балок. Показано, что структурная неоднородность может быть связана не только с материальными свойствами, но и возникать вследствие внешних воздействий, таких как инерционные воздействия и температурные нагрузки. Значительное внимание уделено вопросам связанных с эффективным применением структурно неоднородных балок в области архитектуры, строительстве, робототехнике, аэронавтике и других инновационных сферах. В шестом и седьмом параграфах приводится обзор существующих численных методов и подходов для приближенного и достоверного описания динамических процессов происходящих в неоднородных балках. Обсуждаются различные промышленные программные пакеты, позволяющие за приемлемое время и с высокой степенью точности решать динамические задачи балок с переменными физическими и геометрическими свойствами. В седьмой, завершающей части большое внимание уделено применению метода конечных элементов.
Ключевые слова: динамика, балка переменного сечения, собственные колебания, численные методы, структурная неоднородность, метод конечного элемента, функционально градуированные материалы.

1. Введение

Многие балки, применяемые в технике и строительстве, характеризуются переменными геометрическими и физическими параметрами. Типичным случаем является коническая балка. Кроме того, например, балка при неравномерном распределении температуры имеет переменные физические свойства. Наличие переменных параметров значительно затрудняет динамический анализ таких балок.

Изучение динамики конструкций в настоящее время становится все более важным для инженеров-строителей, поскольку многоэтажные сооружения становятся относительно более гибкими. Такая тенденция в строительстве, как правило, приводит к увеличению амплитуд колебаний зданий. Поэтому в некоторых случаях необходимо рассчитать динамические характеристики высотных конструкций уже на этапе проектирования. При анализе свободных колебаний консольных высотных зданий их можно моделировать, в первом приближении, балками с переменным поперечным сечением.

В течение последних нескольких десятилетий значительное количество публикаций, представляющих либо аналитические, либо численные решения, были посвящены поперечным колебаниям неоднородных балок и равномерно вращающихся балок. Характеристическая черта управляющих дифференциальных уравнений поперечных колебаний неоднородных балок состоит в том, что они представляют собой линейные уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами.

Поперечные колебания неоднородных балок изучались многочисленными исследователями вследствие их значимости для гражданского строительства. Эти исследования представляют из себя либо аналитические [1]–[20], либо приближенные [21]–[35] решения.

Аналитические решения получены в виде ортогональных полиномов [1], функций Бесселя [2]–[11], гипергеометрических рядов [12]–[14], степенных рядов, полученных методом Фробениуса [15]–[19]. Метод, в котором уравнения движения неоднородных балок преобразуют в одно, описывающее движение некоторой однородной балки, приведен в работе [20]. Приближенные методы, такие как метод Рэлея-Ритца, с использованием либо ортогональных многочленов [20, 23, 24], либо рядов Фурье [25] в качестве пробных функций, метод Ритца [26], метод Галеркина [27], метод конечных разностей [28] или метод конечного элемента [29]–[35] были использованы для нахождения приближенных собственных частот неоднородных балок.

2. Аналитические подходы

Среди результатов, представленных в литературе, точные решения в замкнутой форме представляют особый интерес из-за того, что они служат критериями, по которым можно оценить точность различных приближенных решений, полученных с помощью методов Релея-Ритца, Бубнова-Галеркина, конечных разностей, конечных элементов, дифференциальных квадратур и др. [36]. Кроме того, они служат тестовой базой для разработки новых систем численного решения краевых задач. Пакет тестирования, состоящий из точных решений нескольких краевых задач Штурма-Лиувилля второго порядка, который представляет собой реалистичный тест производительности доступных в настоящее время автоматических кодов для нахождения собственных значений классических задач Штурма-Лиувилля, можно найти в [37].

Абрате [20] представил точные решения для нового класса конических балок. Он показал, что для некоторых неоднородных стержней уравнение движения можно преобразовать к уравнению однородной балки. Для проверки этих результатов была разработана общая процедура анализа свободных колебаний конических балок. Подход Рэлея-Ритца использован для формулировки задачи, и смещения раскладываются в ряд полиномиальных функций, которые могут удовлетворять граничным условиям на одном конце. Если концы стержня полностью фиксированы, то собственные значения неравномерного континуума такие же, как и у однородных балок. Для других граничных условий на концах также получены точные решения. Эффективная процедура разработана и применена для анализа колебаний неоднородной балки общей формы поперечного сечения и произвольными граничными условиями. Для нахождения фундаментальной собственной частоты неоднородной балки получены простые формулы.

Фируз-Абади и др. [38] исследовали сужающеюся балку приближенным аналитическим методом и представили решение на основе приближений Венцеля, Крамерса, Бриллуина для свободных поперечных колебаний балок с переменным поперечным сечением.

Хсу и др. [39] применили модифицированный метод разложения Адомиана (AMDM) для неоднородной балки Эйлера-Бернулли. Полученные решения хорошо согласуются с аналитическими и численными результатами, приведёнными в литературе.

В прошлом было проведено много исследований свободных колебаний неоднородных балок. Однако решения в замкнутой форме до сих пор получены для малого числа задач. Показано, что аналитические решения можно найти для некоторых особых случаев, например, как структуры с экспоненциально изменяющимся поперечным сечением [40]–[43]. Обычно для построения решения применяют различные численные методы, такие как метод конечных элементов, метод конечных разностей и т. д.

Для уравнений в частных производных, решения о свободных колебаниях получаются в виде тригонометрических и гиперболических функций [40, 41, 43], гипергеометрических функций [44], функций Бесселя [42]. Эти решения описывают поведение балки для различных граничных условий.

Ван [45] получил решения в замкнутой форме для свободных изгибных колебаний стержня с переменной распределённой жёсткостью, но однородно распределённой массой.

Ли и др. [46] смоделировали рамную конструкцию в виде поперечной балки с переменным поперечным сечением. Последняя часть этой работы посвящена конструкции каркасно-сдвиговых стенок, которые моделировались как призматическая балка Тимошенко. Однако в целом невозможно или, по крайней мере, очень сложно получить точное аналитическое решение дифференциальных уравнений для свободного колебания стержней с переменной массой и жесткостью, но иногда точное решение может быть получено выбором подходящего распределения массы и жесткости вдоль стержня.

3. Балки переменного сечения

Большинство рассмотренных задач относятся к исследованию поперечных колебаний сужающихся балок. Эти результаты можно систематизировать следующим образом: балки с круглым поперечным сечением либо усеченные [4– 7, 15], имеющими один острый конец [9, 16], либо два острых конца [1, 9]; балки с прямоугольным поперечным сечением и с постоянной шириной [2– 4, 16, 25–28, 32–34], с постоянной толщиной [9, 18, 19] или пирамидой [3–10].

Хайдебрехт [47] с использованием тригонометрического ряда Фурье нашел из частотного уравнения приближенные собственные частоты и формы колебаний неоднородной просто опертой балки. Бранч [48] оптимизировал основную частоту поперечных колебаний стержней с переменным поперечным сечением, для которых допустимо изменение формы сечения по длине так, что его момент инерции линейно связан с площадью. Ольхоф и Парбери [49] использовали функцию площади поперечного сечения в качестве проектного параметра, чтобы максимизировать разницу между двумя соседними собственными частотами.

Джайтгоанкар и Чехил [50] изучали неоднородные балки с поперечным сечением, непрерывным или не непрерывным по длине. Гупта [51] численно нашел собственные частоты и формы колебаний сужающихся балок с использованием метода конечных элементов.

3.1. Конические балки

Изгибные колебания конических балок были исследованы во многих работах. Нагулешваран [16, 52] определил приближенные собственные частоты одноконусных балок и двойных конических стержней прямым решением уравнения формы колебаний на основе метода Фробениуса. Он [15] также исследовал однородную балку прямоугольного сечения, одна сторона которой изменяется в виде квадратного корня осевой координаты. Чжоу и Чунг~\cite [22, 53] исследовали колебательные характеристики конических балок с непрерывно изменяющимся прямоугольным поперечным сечением. Теории изгиба Бернулли-Эйлера и Тимошенко были использованы для описания движения балки. В качестве допустимых функций были разработаны новые балочные функции, которые являются полным решением задачи об изгибе конической балки при произвольной статической нагрузке. Вековое уравнение выводится с помощью метода Рэлея-Ритца. Показано, что собственные частоты могут быть получены с высокой точностью при использовании лишь небольшое числа членов статических функций.

В нескольких работах были рассмотрены балки прямоугольного сечения, в которых ширина изменялась с любой положительной полиномиальной степенью продольной координаты, а толщина была либо постоянной [17], либо линейной [3], либо также менялась с любой положительной полиномиальной степенью [11, 22]. Обсуждалась возможность изменения толщины балки в соответствии с параболическим законом при постоянной ширине [32] или нулевой ширине на обоих концах балки [12]. Кранч и Адлер [9] представили решения в замкнутой форме (в терминах функций Бесселя и / или степенных рядов) для собственных частот и форм колебаний неограниченных неоднородных балок с постоянной толщиной и экспоненциально меняющейся шириной для четырех видов поперечных сечений.

Есе и др. [40] исследовали колебания изотропной балки с переменным поперечным сечением. В этом случае управляющее уравнение сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно пространственной координаты для семейства поперечных сечений с экспоненциально изменяющейся шириной. Получены аналитические решения задач о собственных колебаниях балки для трёх различных типов граничных условий: простое опирание, жесткое защемление и свободные концы. Собственные частоты и формы колебаний были определены для каждого набора граничных условий. Результаты показали, что такое изменение поперечного сечения существенно влияет на собственные частоты и формы колебаний. Амплитуда колебаний увеличивается для расширяющихся балок, в то время как она уменьшается для сужающихся.

Интерес исследователей к задачам о колебаниях неоднородных одномерных структур в первую очередь связан с исследованием Эйзенбергера [54] конических стержней, показывающее, что собственные частоты слабо зависят от конуса. Кроме того, Граф [55] упомянул, что для стержней с коническим поперечным сечением уравнение движения можно получить в виде волнового уравнения путем соответствующего изменения переменной. Изучение конических стержней важно для изучения основ [56–58] и динамики композитных структур, подверженных высокоскоростному удару [59]. В этих случаях динамический отклик полуплоскости на поверхностную нагрузку можно точно определить с использованием конической модели.

Предыдущие исследования колебаний конических балок включают исследование Конвея и др. [6], который получил точное решение уравнения движения для конической балки как разложение по функциям Бесселя и представил детерминантные уравнения для нахождения собственных частот таких балок для четырех наборов граничных условий. Мейби и Роджерс [5] использовали тот же подход для изучения защемленных балок с постоянной шириной и линейно изменяющейся толщиной или постоянной толщиной и линейно изменяющейся шириной. Они [60] также рассматривали полиномиальное изменение площади поперечного сечения балки и момента инерции для получения собственных частот двойной конической балки. Гоэль [3] и Кравер и Джампала [8] изучали вибрацию линейно сужающихся балок, ограниченных пружиной.

Бейли [61] впервые использовал подход Рэлея-Ритца и численно решил частотное уравнение, чтобы найти собственные частоты сужающихся консольных балок. Существенные граничные условия на другом конце выполняются с использованием метода множителей Лагранжа [62]. Площадь поперечного сечения и момент инерции балки считаются произвольными полиномиальными функциями осевой координаты. Результаты представлены для нескольких частных случаев и показывают отличное согласие с ранее опубликованными результатами [54, 63, 64]. Предложенный метод прост в применении и эффективен. Кроме того, простые формулы для предсказания основных частот получены с использованием одномерных приближений Рэлея-Ритца. Показано, что эти формулы являются точными и должны представлять интерес для конструкторов.

Аналогичные решения в замкнутой форме для усеченных конусных балок и усеченных клиновидых стержней были получены Конвеем и Дубилом [2].

Лаура и др. [65] использовали приближенные численные подходы для определения собственных частот балок Бернулли с постоянной шириной и билинейно изменяющейся толщиной. Датта и Силь [66] численно определили собственные частоты консольных стержней с постоянной шириной и линейно изменяющейся высотой. Карунту [14] рассмотрел нелинейные колебания балок с прямоугольным поперечным сечением и параболическим изменением толщины.

3.2. Ступенчатые балки

Использование точечных интерполяционных функций для решения разнообразных задач для балок с переменным поперечным сечением является естественным подходом. Однако некоторые исследователи [67, 68] фокусировались только на балке с линейным и непрерывно изменяемым поперечным сечением по ее длине. Частным случаем является ступенчатая балка, балка с резкими изменениями поперечного сечения и / или свойствами материала. Опубликованы несколько работ о ступенчатых стержнях. Аналитический подход к вычислению частот балок, лежащих на упругих концевых опорах с трехступенчатым изменением поперечного сечения, был представлен Нагулешвараном [69]. Маурини и др. [70] представили усовершенствование этого метода, введя специальные функции скачка, чтобы учесть разрывы в кривизнах формы балки. Киса и Гурель [71] разработали методику решения задач о свободных колебаниях ступенчатой балки с круглым поперечным сечением при наличии в ней трещины.

Балка с переменным поперечным сечением часто моделируется большим количеством небольших однородных элементов, заменяя непрерывные изменения степенным законом. Эта схема является точной для ступенчатой балки, но, в то же время, приближенной для стержня с непрерывным изменением поперечного сечения. Хотя таким образом всегда можно уменьшить ошибки настолько, насколько это необходимо, и получить приемлемые результаты. Но моделирование и вычислительные усилия могут стать чрезмерными.

Акуиелло и Эрколано [10] определяли прямым методом частоты свободных колебаний балок, состоящих из двух секций с различными поперечными сечениями. Было показано, что уравнения движения могут быть решены с помощью функций Бесселя.

В работе [9] также рассматриваются симметричные составные балки прямоугольного поперечного сечения с линейно-меняющимися толщиной и шириной относительно продольной координаты.

В [72,73] решения задачи о свободных колебаниях ступенчатых балок были получены с использованием свойств функции Грина. Яворский и Доуэлл [74] экспериментально проанализировали свободные колебания ступенчатой консольной балки и сравнили полученные результаты с классическими, следующими из метода Рэлея-Ритца, компонентного модального анализа и коммерческого программного пакета конечных элементов ANSYS, локальных граничных условий и нелинейных эффектов. Лу и др. [75] использовали метод составных элементов для анализа свободных и вынужденных колебаний ступенчатых стержней и сравнили теоретические результаты с экспериментальными.

Мао и Пьетрско [76] использовали метод разложения по Адомиану для исследования свободных колебаний двухступенчатой балки с учетом различных граничных условий, местоположений ступеней и степенных соотношений. Чжэн и Джи [77] получили эквивалентное представление ступенчатой балки с однородными ступенями для упрощения расчета статических деформаций и частот. Методы анализа ступенчатых стержней с непрерывно измененным поперечным сечением, как правило, не унифицированы.

Кроме того, для ступенчатых балок найдено решение задачи о свободных колебаниях в замкнутой форме [78].

Всесторонний обзор работ о свободных колебаниях ступенчатых стержней можно найти в работах [79, 80]. Некоторые из этих результатов можно также найти в монографии Элишакова [36].

Разрывы влияют на динамическое поведение балочных конструкций, поскольку изменение их геометрии может привести к изменению механических характеристик, таких как собственные частоты, формы колебаний, коэффициент демпфирования, жесткость или гибкость. Аналитически определенные частоты и поперечное смещение для различных граничных условий и длин балок хорошо известны и в значительной степени представлены в литературе [81–85]. С другой стороны, аналитические решения дифференциального уравнения для колеблющихся балок с разрывами еще не найдены. Поэтому исследователи заменили непрерывный подход дискретным с целью получить разрешимые математические уравнения [86–88]. Однако применение конечных элементов, несмотря на то, что они упрощают реальность, вводит ошибки и, следовательно, приводит к неточным результатам.

Ванг [89] проанализировал колебания ступенчатых балок на упругом основании. Ли и Бергман [72] изучали вибрацию ступенчатых балок и прямоугольных пластин на основе метода элементарной динамической гибкости. Они разделили структуру с разрывами на элементарные подструктуры и получили поле смещения для каждого из них в терминах динамической функции Грина. Основываясь на методе Рэлея-Ритца, Ли и Нг [90] вычислили основные частоты и критические значения потери устойчивости для просто опертых ступенчатых стержней. Роза и др. [7] провели анализ колебаний ступенчатых балок с промежуточными упругими опорами. Нагулешваран [91] проанализировал колебания и устойчивость ступенчатой балки Эйлера-Бернулли при наличии осевой силы.

3.3. Балки с особенностями

Среди работ, изучающих поперечные колебания неоднородных балок прямоугольного поперечного сечения, лишь немногие были посвящены балкам с одним острым концом [9, 15–18] и только две для случая двух острых концов [1, 9].

Карунту [44, 92] рассмотрел поперечные колебания, как неоднородных, так и однородных балок, и пластин. Описаны классы балок и осесимметричных круглых пластин, краевые задачи которых описывают поперечные осесимметричные колебания и сводятся к сингулярной задаче на собственные значения (особенности встречаются на обоих концах). Классы балок и пластин, называемые впоследствии классами Якоби, задаются геометрией и граничными условиями. Геометрия поперечного сечения описывается параболическим изменением толщины относительно осевой координаты для балок и по радиусу для пластин. Балки, принадлежащие этому классу, имеют один или два острых конца (особенности) наряду с некоторыми другими граничными условиями. Пластины имеют нулевую толщину при внутреннем и внешнем радиусах. Также рассмотрены консоли прямоугольного (или эллиптического) поперечного сечения с параболическим изменением толщины. Декомпозиция их дифференциальных уравнений четвёртого порядка для поперечных колебаний в пару дифференциальных уравнений второго порядка приводит к общим решениям в терминах гипергеометрических функций. Точные собственные частоты и формы колебаний были найдены для остроконечных параболических консолей с различной длиной.

Решения для неоднородных балок, равномерно вращающихся стержней и круглых пластин, чьи точные формы поперечных колебаний являются классическими ортогональными многочленами, пока не известны в литературе, кроме [1]. В этой статье краевая задача о поперечных колебаниях неоднородной балки Эйлера-Бернулли сводится к сингулярной задаче нахождения собственного значения дифференциального уравнения четвертого порядка в классических ортогональных многочленах. Однако, и там, были рассмотрены только стержни с круглым поперечным сечением.

4. Физически неоднородные балки

Известно, что модули упругости большинства металлов уменьшаются с повышением температуры, что оказывает существенное влияние на вибрационные характеристики балки при неоднородном распределении температуры вдоль балки. Кимбалл и Ловелл [93] исследовали изменение модуля Юнга в зависимости от температуры посредством вариации собственных частот.   Лиу и др. [94] изучали влияние распределения температуры на критические скорости вращения ротора газовой турбины. Для балки при неравномерном осевом распределении температуры модуль Юнга изменяется вдоль этого направления, что оказывает значительное влияние на поперечные колебания балки.

Кайя [95] исследовал колебания вращающейся, конусной балки Тимошенко, которая подвергается изгибной вибрации. В уравнения движения включены параметры радиуса ступицы, скорости вращения, коэффициента конусности, вращательной инерции, деформации сдвига и коэффициента упругости. В части решения используется эффективный математический метод, называемый методом дифференциального преобразования, DTM.

Некоторые исследователи рассматривали поперечные колебания равномерно вращающихся балок. Для однородных [96, 97] и неоднородных балок [18] были получены решения в виде степенных рядов. Решения в терминах гипергеометрических функций были получены для целого класса неоднородных балок [12, 98] либо усеченных, либо с одним концом острым. Метод конечных элементов также использовался для исследования вращающихся балок [29].

В дополнение к геометрии поперечного сечения также могут изменяться другие параметры, такие как свойства материала (например, модуль упругости, массовая плотность и т. д.). Такие изменения свойств соответствуют исследованиям балок из функционально градуированных материалов. В последние годы появилось много функционально градуированных материалов (FGM). В 1984 году теория функционально градуированных материалов была впервые представлена в Японии. Как правило, FGM представляет собой материал, в котором использованы объемные фракции двух или более компонентов материала, чтобы непрерывно изменять физические свойства в заданном направлении, в частности, по толщине.

Для этого случая было проведено множество исследований, посвященных статическому и динамическому анализу (например, [99–103]). Для аксиально-функционально градуированных балок получено всего несколько решений при произвольных изменениях градиента свойств материала [104–105].

В последние годы конструкции, сделанные из функционально градуированного материала, исследовали многие ученые. Хаасен и др. [41] рассмотрели свободные колебания балки из такого материала с экспоненциально изменяющимся поперечным сечением на основе аналитических методов. Однако большинство исследований по вибрации

FGM балок выполняются на основе метода конечных элементов [104, 106–108]. Также в этом направлении Моханты и др. [109–110] исследовали свободные колебания однородного функционально градуированной сэндвич-балки с использованием FEM на основе теории балки Тимошенко первого порядка. Используя другие схемы, Ке и др. [111] исследовали нелинейные колебания функционально градуированных балок, а в работе [112] изучались динамические характеристики упругосвязанного двухфункционально градуированной балки при движущейся гармонической нагрузке с постоянной скоростью.

Вышеприведённый обзор ясно показывает, что большинство работ выполняется по анализу свободных и вынужденных колебаний балок из различных материалов. Однако решения задач, описывающих поведение FGM балок на упругом основании, по-прежнему ограничены.

Элишаков и Джонсон [113] исследовали задачу колебаний балки с переменными вдоль ее оси свойствами материала. Ву и др. [114, 115] исследовали собственные частоты и формы колебаний балок с постоянной шириной и линейно сужающейся толщиной, несущей любое количество точечных масс в произвольных положениях по длине балок. Используя точные решения для собственных частот и форм колебаний неограниченной одноконусной балки (без несущих точечных масс), уравнения движения для связанной ограниченной балки (с точечными массами). Решение этих уравнений дает желаемые собственные частоты и формы колебаний.

Точное аналитическое решение для консольного стержня неоднородного поперечного сечения и переноса массы на свободном конце было получено Росси и др. [116].

5. Технические применения

Балки используются как элементы конструкции во многих технических приложениях, и в литературе можно найти большое количество исследований изгибных колебаний однородных изотропных балок [117]. Неоднородные балки могут обеспечить лучшее или более подходящее распределение массы и прочности, чем однородные, и поэтому могут отвечать специальным функциональным требованиям в области архитектуры, робототехники, аэронавтики и других инновационных инженерных применений, и они были и остаются предметом многочисленных исследований. Балки с переменным поперечным сечением и / или свойствами материала часто используются в авиационной технике (например, валы ротора и функционально градуированные балки), машиностроение (например, стрелы кранов) и гражданское строительство (например, балки, колонны и перекрытия). За многие годы было проведено множество исследований динамики балочных конструкций во многих различных сферах науки и техники.

Последние разработки в области микро-электро-механических систем (MEMS) с использованием неоднородных балок и пластин можно квалифицировать следующим образом: аналитические модели энергетических потерь на опору в зажимах микромощных стержневых резонаторах с изгибными колебаниями в плоскости [118]; резонансные методы для определения коэффициента Пуассона пленочных материалов [119]; точные решения для связанных сдвига по толщине и сдвига кварцевых полос с линейной меняющейся толщиной [120]; анализ полной гидрофонной системы, включая эффекты неоднородной пластины-резонатора [121].

Различные граничные условия, которые встречаются в гражданских, микромеханических и авиационных приложениях также описаны в литературе. Например, для новых динамических поглотителей балочного типа [122] были рассмотрены свободные граничные условия, подходящие для анализа слоистых пьезоэлектрических стержневых микромеханическихе резонаторов [123, 124] и в методах вязкоупругого резонансного измерения для материалов с малыми потерями [125]. Рассмотрены граничные условия для балки без шарнира для многодиапазонных динамических систем с гибкими компонентами [126, 127] и управления в активных магнитных подшипниковых системах [128]. Рассмотрены граничные условия без скольжения для виброизоляции строительных конструкций от разрушающего землетрясения [129, 130] и для балок при сжимающих нагрузках [131]. Анализ четырех моделей Эйлера-Бернулли, Рэлея, сдвига и Тимошенко для поперечно колеблющейся однородной балки с несколькими граничными условиями представлен в работе [81]}. Для космических структур [132] и гидроупругого анализа больших плавающих платформ рассмотрены круглые пластины с закругленными краями [133].

Анализ литературы показывает, что, как правило, авторы предыдущих исследований использовали специальные функции для получения решения. Эти экспоненциальные функции подходят для описания распределений жесткости и массы типичных высотных зданий. В вышеупомянутых исследованиях Ли и коллеги [134–136] предположили, что деформация изгиба является доминирующей в выражении для полной деформации высотных зданий. Было признано, что боковая деформация большинства зданий не является чисто изгибной, но в большинстве случаев вносит значительный вклад в сдвиг. Измеренные данные поля [45, 46,137–139] показали, что деформация сдвига обычно доминирует в общей деформации каркасных зданий. Обычно исследовали деформацию изгиба и сдвига, возникающие при вибрации зданий, отдельно, но на самом деле поперечные колебания конструкции характеризуются двумя основными типами деформации: изгиб и сдвиг [140]. В теории балок Тимошенко [141] учитываются как сдвиговые, так и изгибные деформации. Романо [142] нашел решение в замкнутой форме для балки Тимошенко с переменным поперечным сечением. Рагозар и др. [143] рассмотрели сдвиговые и изгибные эффекты при одновременном формировании вибрации путем моделирования динамики зданий как колебания балки Тимошенко с переменным поперечным сечением. Точное решение для балки Тимошенко получено путем выбора подходящей аппроксимации геометрических и механических свойств балки, такой как полиномиальная или экспоненциальная.

Проводились также исследования о влиянии фундамента на вибрацию здания [144–146]. Кроме того, некоторые авторы исследовали реакцию балок, подвергнутых импульсной нагрузке [147, 148] и движущейся нагрузке [112, 149, 150].

6. Численные подходы

В большинстве предыдущих исследований использовались численные методы для анализа поперечных колебаний балок. Например, в литературе сообщается о применении метода конечных элементов [21, 51, 147], метода Галеркина [151], приближенного метода [152].

Методы граничных элементов для статического анализа кручения и крутильных колебаний стержней с переменным поперечным сечением были разработаны Сапаунцакисом и др. [153, 154]. Метод динамической жесткости для исследования свободных изгибных колебаний вращающихся балок с линейно измененным поперечным сечением использовался Банерджее и др. [155].

Шин и др. [156] применил обобщенный дифференциальный квадратурный метод и метод дифференциального преобразования к анализу вибраций круговых дуг с переменным поперечным сечением, указав, что эти два метода показали быструю сходимость и точность.

Для решения дифференциальных уравнений и граничных задач были разработаны численные методы и коммерческие пакеты программного обеспечения. Обзор численных методов решения самосопряженных и несамосопряженных краевых задач на собственные значения Штурма-Лиувилля можно найти в работе [157].

Программный пакет SLEIGN [158] для вычисления собственных значений и собственных функций как для регулярных, так и сингулярных краевых задач Штурма-Лиувилля второго порядка описан в научной литературе. Показано, что для решения таких задач у SLEIGN нет серьезных конкурентов [159]. Однако для решения краевых задач Штурма-Лиувилля четвертого порядка существует только одна программа SLEUTH [160], которая имеет довольно серьезные ограничения применительно к регулярным задачам. Другой численный решатель краевых задач, COLSYS может быть применен к сингулярным задачам. При этом следует учитывать, что численные решения могут не соответствовать истинному решению [161].
Среди коммерческих программных пакетов, доступных для решения дифференциальных уравнений, MATHEMATICA - один из самых успешных пакетов.

Тем не менее, этот пакет имеет существенные ограничения. Его средство для обработки дифференциальных уравнений DSolve может решать только линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, но, правда, довольно высокого порядка. Он может также решить линейные уравнения до второго порядка включительно с непостоянными коэффициентами.

7. Конечно-элементное моделирование

В работах [21, 162, 33] исследовано колебание линейно суженной балки Эйлера-Бернулли и балки Тимошенко методом конечных элементов.

Линейно-конические балочные элементы были применены для анализа динамического поведения ротора [163–165].

Клихорн и Танбарк [166] предложили конечно-элементную модель для моделирования свободных изгибных колебаний линейно сужающихся балок Тимошенко. Функции формы были получены из решения однородных управляющих уравнений для статических прогибов. Иллюстративные примеры демонстрируют эффективность этого элемента и позволяют сравнивать результаты с результатами, полученными с помощью элементов, основанных на других формулировках.

В работах [167, 168] обсуждается метод спектральных конечных элементов (SFEM). Этот метод применяется для разработки модели с низким числом степеней свободы в задачах динамического анализа вращающихся сужающихся балок. В нем используются полуаналитические волновые решения управляющих уравнений в частных производных. Для получения любой модальной частоты или формы колебаний необходим только один единственный спектральный элемент. Минимальное количество таких спектральных конечных элементов соответствует числу подструктур, т. е. участков балки с различными сужениями. Процедура сборки элемента выполняется так же, как и в обычном подходе метода конечных элементов.

Основываясь на решении статического дифференциального уравнения и кубической полиномиальной функции, Гунда и Гангули [169, 170] получили рациональную функцию формы для конического элемента балки Эйлера-Бернулли. Этот конечный элемент хорошо применим для описания поведения быстровращающейся балки, для которой функции интерполяционной формы получены путем удовлетворения управляющего статического однородного дифференциального уравнения вращающихся балок Эйлера-Бернулли. Функции формы оказываются рациональными функциями, которые также зависят от скорости вращения и положения элемента вдоль стержня и учитывают эффект центробежного усиления. Этот элемент применяется для статического и динамического анализа вращающихся балок. В статическом случае рассматривается консольная балка, нагруженная на конце осевой силой. Динамический анализ показал эффективность использования этого элемента для определения собственных частот в задачах для однородных и конусообразных балок с консольными и шарнирными граничными условиями.

Аттарнейд и Шахба [171] получили набор новых функций формы в виде степенного ряда для конического элемента Эйлера-Бернулли. Ярдимоглу [172] предложил конечный элемент для вращающейся сужающейся балки Тимошенко с равной прочностью. Шахба и др. [173] сформулировали конечный элемент для анализа колебаний FGM конических балок Эйлера-Бернулли.

Были исследованы статические характеристики изогнутой балки с переменным поперечным сечением [174], в котором были представлены матрица жесткости и эквивалентные узловые нагрузки изогнутого балочного элемента. Унифицированная формулировка была получена Карерrой и др. [175, 176], и в этих рамках они представили метод анализа балок с произвольной геометрией поперечного сечения.

Романо и Франциози [67, 68] независимо применили функции интерполяции точного перемещения к балкам с линейно изменяемым поперечным сечением. Этот подход они использовали для решения статических и динамических задач изгиба прямолинейной балок с разнообразными типами поперечного сечения.

Работа поддержана фондом РНФ, грант №17-19-01247.

Литература

1. Caruntu D.I. On bending vibrations of some kinds of beams of variable cross-section using orthogonal polynomials // Revue Roumaine des Sciences Techniques. Serie de Mecanique Appliquee. 1996. V. 41, № 3-4. pp. 265-272.

2. Conway H.D., Dubil J.F. Vibration frequencies of truncated wedge and cone beam // Journal of Applied Mechanics. 1965. V. 32, № 4. pp. 932-935.

3. Goel R.P. Transverse vibration of tapered beams // Journal of Sound and Vibration. 1976. V. 47, № 1. pp. 1-7.

4. Sanger D.J. Transverse vibration of a class of non-uniform beams // Journal of Mechanical Engineering Science. 1968. V. 16. pp. 111-120.

5. Mabie J.J., Rogers C.B. Traverse vibrations of tapered cantilever beams with end support // Journal of Acoustical Society of America. 1968. V. 44. pp. 1739-1741.

6. Conway H.D., Becker E.C.H., Dubil J.F. Vibration frequencies of tapered bars and circular plates // Journal of Applied Mechanics. 1964. T. June. pp. 329-331.

7. Rosa M.A. De, Auciello N.M. Free vibrations of tapered beams with flexible ends // Computers & Structures. 1996. V. 60, № 2. pp. 197-202.

8. Craver Jr. W.L., Jampala P. Transverse vibrations of a linearly tapered cantilever beam with constraining springs // Journal of Sound and Vibration. 1993. V. 166, № 3. pp. 521-529.

9. Cranch E.T., Adler A. Bending vibrations of variable section beams // American Society of Mechanical Engineers. 1956. V. 23, № 1. pp. 103-108.

10. Auciello N.M., Ercolano A. Exact solution for the transverse vibration of a beam a part of which is a taper beam and other part is a

uniform beam // International Journal of Solids and Structures. 1997. pp. 2115-2129.

11. Wang H.C. Generalized hypergeometric function solutions on the transverse vibrations of a class of non-uniform beams // Journal of Applied Mechanics. 1967. V. 34E. pp. 702-708.

12. Storti D., Aboelnaga Y. Bending vibrations of a class of rotating beams with hypergeometric solutions // Journal of Applied Mechanics. 1987. V. 54. pp. 311-314.

13. Caruntu D.I. Relied studies on factorization of the differential operator in the case of bending vibration of a class of beams with variable cross-section // Revue Roumaine des Sciences Techniques. Serie de Mecanique Appliquee. 1996. V. 41, № 5-6. pp. 389-397.

14. Caruntu D.I. On nonlinear vibration of nonuniform beam with rectangular cross-section and parabolic thickness variation // Solid Mechanics and its Applications. 2000. V. 73. pp. 109-118.

15. Naguleswaran S. Vibration in the two principal planes of a non-uniform beam of rectangular cross-section, one side of which varies as the square root of the axial co-ordinate // Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 172, № 3. pp. 305-319.

16. Naguleswaran S. A direct solution for the transverse vibration of Euler- Bernoulli wedge and cone beams // Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 172, № 3. pp. 289-304.

17. Naguleswaran S. The vibration of a “complete” Euler-Bernoulli beam of constant depth and breadth proportional to axial coordinate raised to a positive exponents // Journal of Sound and Vibration. 1995. V. 187, № 2. pp. 311-327.

18. Vibration modes of centrifugally stiffened beam / A.D. Wright, C.E. Smith, R.W. Thresher [and others] // Journal of Applied Mechanics. 1982. V. 49. pp. 197-202.

19. Chaudhari T.D., Maiti S.K. Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack // Engineering Fracture Mechanics. 1999. V. 63. pp. 425-445.

20. Abrate S. Vibration of non-uniform rods and beams // Journal of Sound and Vibration. 1995. V 185, № 4. pp. 703-716.

21. Klein L. Transverse vibrations of non-uniform beams // Journal of Sound and Vibration. 1974. V. 37. pp. 491-505.

22. Zhou D., Cheung Y.K. The free vibration of a type of tapered beams // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2000. V. 188. pp. 203-216.

23. Grossi R.O., Bhat R.B. A note on vibrating tapered beams // Journal of Sound and Vibration. 1991. pp. 147-174.

24. Auciello N.M. On the transverse vibrations of non-uniform beams with axial loads and elastically restrained ends // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. V. 43. pp. 193-208.

25. Krynicki E., Mazurkiewicz Z. Free vibration of a simply supported bar with linearly variable height of cross section // Journal of Applied Mechanics. 1962. V. 29E. pp. 497-501.

26. Sato K. Transverse vibrations of linearly tapered beams with ends restrained elastically against rotation subjected to axial force // International Journal of Mechanical Sciences. 1980. V. 22. pp. 109-115.

27. Rao J.S. The fundamental flexural vibration of a cantilever beam of rectangular cross section with uniform taper // The Aeronautical Quarterly. 1965. V. 16, № 2. pp. 139-144.

28. Carnegie W., Thomas J. Natural frequencies of long tapered cantilevers // The Aeronautical Quarterly. 1967. V. 18. pp. 309-320.

29. Hodges D.H., Rutkowski M.J. Free-vibration analysis of rotating beams by variable-order finite element method // American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 1981. V. 19. pp. 1459-1466.

30. Khulief Y.A. Vibration frequencies of a rotating tapered beam with end mass // Journal of Sound and Vibration. 1989. V. 134. pp. 87-97.

31. Kim C.S., Dickinson S.M. On the analysis of laterally vibrating slender beams subject to various complicating effects // Journal of Sound and Vibration. 1988. V. 122. pp. 441-455.

32. Roy P.K., Ganesan N. Studies on the dynamic behavior of a cantilever beam with varying thickness // Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 177, № 1. pp. 1-13.

33. To C.W.S. A linearly tapered beam finite element incorporating shear deformation and rotary inertia for vibration analysis // Journal of Sound and Vibration. 1981. V. 78. pp. 475-484.

34. Chinchalkar S. Determination of crack location in beams using natural frequencies // Journal of Sound and Vibration. 2001. V. 247, № 3. pp. 417-429.

35. Wang Q. Sturm-Liouville equation for free vibration of a tube-in-tube tall building // Journal of Sound and Vibration. 1996. V. 191, № 3. pp. 349-355.

36. Elishakoff I. Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-form Solutions. Boca Raton, FL: CRC Press, 2005.

37. Pryce J.D. A test package for Sturm-Liouville solvers // ACM Transactions on Mathematical Software. 1999. V. 25, № 1. pp. 21-57.

38. Firouz-Abadi R.D., Haddadpour H., Novinzadeh A.B. An asymptotic solution to transverse free vibrations of variable-section beams // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 304. pp. 530-540.

39. Hsu J.C., Lai H.Y., Chen C.K. Free vibration of non-uniform Euler-Bernoulli beams with general elastically end constraints using Adomian modified decomposition method // Journal of Sound and Vibration. 2008. V. 318. pp. 965-981.

40. Ece M.C., Aydogdu M., Taskin V. Vibration of a variable cross-section beam // Mechanics Research Communications. 2007. V. 34. pp. 78-84.

41. Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section / A.A Haasen, T. Abdelouahed, A.M. Sid [and others.] // Journal of Vibration and Control. 2011. V. 17, № 2. pp. 311-318.

42. Lardner T.J. Vibration of beams with exponentially varying properties // Acta Mechanica. 1968. V. 6, № 2-3. pp. 197-202.

43. Suppiger E., Taleb N. Free lateral vibration of beams of variable cross section // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). 1956. V.7, № 8. pp. 501-520.

44. Caruntu D.I. Dynamic modal characteristics of transverse vibrations of cantilevers of parabolic thickness // Mechanics Research Communications. 2009. V. 36. pp. 391-404.

45. Wang G.Y. Vibration of Building and Structures // Beijing Technology Science Press. 1978. pp. 168-178.

46. Li Q.S., Cao H., Li G. Analysis of Free Vibrations of Tall Buildings // Journal of Engineering Mechanics. 1994. V. 120, № 9. pp. 1861-1876.

47. Heidebrecht D.H. Vibration of non-uniform simply supported beams. Journal of the Engineering Mechanics Division. 1967. pp. 1-15.

48. Branch R.M. On the extremal fundamental frequencies of vibrating beams // Journal of Sound and Vibration. 1968. №. 4. pp. 667-674.

49. Olhoff N., Parbery R. Designing vibrating beams and rotating shafts for maximum difference between adjacent natural frequencies // International Journal of Solids and Structures. 1984. V. 20. pp. 63-75.

50. Jategaonkar R., Chehil D.S. Natural frequencies of a beam with varying section properties // Journal of Sound and Vibration. 1989. V. 133. pp. 303-322.

51. Gupta A. Vibration of tapered beams // Journal of Structural Engineering. 1985. V. 111, № 1. pp. 19-36.

52. Naguleswaran S. Vibration of an Euler-Bernoulli beam of constant depth and with linearly varying breadth // Journal of Sound and Vibration. 1992. V. 153. pp. 509-522.

53. Zhou D., Cheung Y.K. Vibrations of tapered Timoshenko beams in terms of static Timoshenko beam functions // Journal of Applied Mechanics. 2001. V. 68. pp. 596-602.

54. Eisenberger M. Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod // Applied Acoustics. 1991. V. 34. pp. 123-130.

55. Graf K. F. Wave Motion in Elastic Solids. Columbus, Ohio: Ohio State University Press, 1975. p. 641.

56. Meek J. W., Wolf J. P. Cone models for homogeneous soil. I. // Journal of Geotechnical Engineering. 1992. V. 118. pp. 667-685.

57. Meek J. W., Wolf J. P. Cone models for soil layer on rigid rock. II. // Journal of Geotechnical Engineering. 1992. V. 118. pp. 686-703.

58. Meek J. W., Wolf J. P. Why cone models can represent the elastic half-space // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1993. V. 22. pp. 759-771.

59. Abrate S. Wave propagation during high velocity impact on composite materials: Final Report for Summer Faculty Research Program: 15.1-15.19: Air Force Office of Scientific Research, 1993.

60. Mabie J.J., Rogers C.B. Transverse vibrations of double-tapered cantilever beams // Journal of Acoustical Society of America. 1972. V. 51. pp. 1771-1772.

61. Babu G.J., Ganguli R. Direct analytical solutions to non-uniform beam problems // Journal of Sound and Vibration. 1978. V. 56. pp. 501-507.

62. Reddy J. N. Energy and Variational Methods in Applied Mechanics. New York: Wiley, 1984.

63. Conway H.D., Dubil J.F. An extension of Timoshenko's method and its application to buckling and vibration problems // Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 169. pp. 141-144.

64. Hodges D.H., Chung Y. Y., Shang X. Y. Discrete transfer matrix method for non uniform rotating beams // Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 169. pp. 276-283.

65. P.A.A.Laura, Gutierrez R.H., Rossi R.E. Free vibration of beams of bi-linearly varying thickness // Ocean Engineering. 1996. V. 23, № 1. pp. 1-6.

66. Datta Jr. A.K., Sil S.N. An analysis of free undamped vibration of beams of varying cross-section // Computers and Structures. 1996. V. 59, № 3. pp. 479-483.

67. Romano F., Zingone G. Deffections of beams with varying rectangular cross section // Journal of Engineering Mechanics. 1992. V. 118, № 10. pp. 2128-2134.

68. Franciosi C., Mecca M. Some finite elements for the static analysis of beams with varying cross section // Computers and Structures. 1998. V. 69, № 2. pp. 191-196.

69. Naguleswaran S. Vibration of an Euler-Bernoulli beam on elastic end supports and with up to three step changes in cross-section // International Journal of Mechanical Sciences. 2002. V. 44, № 12. pp. 2541-2555.

70. Maurini C., Pofiri M., Pouget J. Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams // Journal of Sound and Vibration. 2006. V. 298, № 4-5. pp. 918-933.

71. Gurel M. A., M. Kisa. Free vibration analysis of uniform and stepped cracked beams with circular cross sections // International Journal of Engineering Science. 2007. V. 45, № 2-3. pp. 364-380.

72. Lee J., Bergman L. A. The vibration of stepped beams and rectangular plates by an elemental dynamic flexibility method // Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 171, № 5. pp. 617-640.

73. Kukla S., Zamojska I. Frequency analysis of axially loaded stepped beams by Green's function method // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 300, № 3-5. pp. 1034-1041.

74. Jaworski J. W., Dowell E. H. Free vibration of a cantilevered beam with multiple steps: comparison of several theoretical methods with experiment // Journal of Sound and Vibration. 2008. V. 312, № 4-5. pp. 713-725.

75. Vibration analysis of multiple-stepped beams with the composite element model / Z. R. Lu, M. Huang, J. K. Liu [and others] // Journal of Sound and Vibration. 2009. V. 322, № 4-5. pp. 1070-1080.

76. Mao Q., Pietrzko S. Free vibration analysis of stepped beams by using Adomian decomposition method // Applied Mathematics and Computation. 2010. V. 217, № 7. pp 3429-3441.

77. Zheng T. X., Ji T. J. Equivalent representations of beams with periodically variable crosssections // Engineering Structures. 2011. V. 33, № 3. pp. 706-719.

78. Gutierrez R.H., Laura P.A.A., Rossi R.E. Vibrations of a Timoshenko beam of non-uniform cross-section elastically restrained at one end and carrying a finite mass at the other // OCE Engineering. 1991. V. 18, № 1-2. pp. 129-145.

79. Jang S.K., Bert C.W. Free vibration of stepped beams: Exact and numerical solutions // Journal of Sound and Vibration. 1989. V. 130. pp. 342-346.

80. Jang S.K., Bert C.W. Free vibration of stepped beams: Higher mode frequencies and effects of steps on frequencies // Journal of Sound and Vibration. 1989. V. 132. pp. 164-168.

81. Han S.M., Benaroya H., Wei T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories // Journal of Sound and Vibration. 1999. V. 225, № 5. pp. 935-988.

82. Tejada A. A Mode-Shape-Based Fault Detection Methodology for Cantilever Beams: Tech. Rep.: CR-2009-215721: NASA, 2009.

83. Murphy J. F. Transverse Vibration of a Simply Supported Beam with Symmetric Overhang of Arbitrary Length // Journal of Testing and Evaluation. 1997. V. 25, № 5. pp. 522-524.

84. Tedesco J., Wesley A. Structural Dynamics, The theory and applications. Menlo Park, Ca: Addison Wesley, 1999.

85. Singiresu S. S. Vibration of continuous systems. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.

86. Balageas D., Fritzen C.-P., Guemes A. Structural Health Monitoring. London: ISTE Ltd., 2006.

87. Morassi A., F.Vestroni. Dynamic Methods for damage Detection in Structures. Wien New York: Springer, 2008.

88. Franciosi C., Mecca M. Crack Modeling for Structural Health Monitoring // Structural Health Monitoring. 2002. V. 1, № 2. pp. 139-148.

89. Wang J.I. Vibration of stepped beams on elastic foundations // Journal of Sound and Vibration. 1991. V. 149. pp. 315-322.

90. Lee J., Ng T.Y. Vibration and buckling of a stepped beam // Applied Acoustics. 1994. V. 42. pp. 257-266.

91. Naguleswaran S. Vibration and stability of an Euler-Bernoulli beam with up to three-step changes in cross-section and in axial force // International Journal of Mechanical Sciences. 2003. V. 45. pp. 1563-1579.

92. Caruntu D.I. Classical Jacobi polynomials, closed-form solutions for transverse vibrations // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 306. pp. 467-497.

93. Kimball J.A., Lovell D.E. Variation of Young's modulus with temperature from vibration measurements // Physical Review. 1925. V. 26. pp. 121-124.

94. Prediction of the influence of temperature field on the critical speeds of a rod-fastened rotor / S. Liu, Y. Zhang, Z. Du [and others.] // Gas Turbine Technology. 2011. V. 2. pp. 20-23.

95. Ozdemir O.O., Kaya M.O. Vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam using DTM // Meccanica. 2010. V. 45. pp. 33-42.

96. Naguleswaran S. Lateral vibration of a centrifugally tensioned uniform Euler-Bernoulli beam // Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 176, № 5. pp. 613-624.

97. Du H., Lim M.K., Liu K.M. A power series solution for vibration of a rotating Timoshenko beam // Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 175, № 4. pp. 505-523.

98. Caruntu D.I. Factorization method in bending vibrations of rotating nonuniform Euler-Bernoulli beams // Proceedings of the Sixth International Congress on Sound and Vibration. Copenhagen: 1999. July. pp. 2053-2058.

99. Sankar B. V. An elasticity solution for functionally graded beams // Composites Science and Technology. 2001. V. 61, № 5. pp. 689-696.

100. Zhong Z., Yu T. Analytical solution of a cantilever functionally graded beam // Composites Science and Technology. 2007. V. 67, № 3-4. pp. 481-488.

101. Kapuria S., Bhattacharyya M., Kumar A. N. Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: a theoretical model and its experimental validation // Composite Structures. 2008. V. 82, № 3. pp. 390-402.

102. Kang Y. A., Li X. F. Bending of functionally graded cantilever beam with power-law nonlinearity subjected to an end force // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2009. V. 44, № 6. pp. 696-703.

103. Murin J., Aminbaghai M., Kutis V. Exact solution of the bending vibration problem of FGM beams with variation of material properties // Engineering Structures. 2010. V. 32, № 6. pp. 1631-1640.

104. Alshorbagy A. E., Eltaher M. A., Mahmoud F. F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method // Applied Mathematical Modelling. 2011. V. 35, № 1. pp. 412-425.

105. Huang Y., Li X. F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section // Journal of Sound and Vibration. 2010. V. 329, № 11. pp. 2291-2303.

106. Ying J., Lu C.F., Chen W.Q. Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations // Composite Structures. 2008. V. 84. pp. 209-219.

107. Chakraborty A., Gopalakrishnan S., Reddy J.N. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials // International Journal of Mechanical Sciences. 2003. V. 45, № 3. pp. 519-539.

108. Mohanty S.C., Dash R.R., Rout T. Parametric instability of a functionally graded Timoshenko beam on Winkler's elastic foundation // Nuclear Engineering and Design. 2011. V. 241, № 8. pp. 2698-2715.
109. Mohanty S.C., Rout T. Vibration and dynamic stability analysis of a functionally graded timoshenko beam on pasternak elastic foundation // International Journal of Aerospace and Lightweight Structures. 2012. V. 2, № 3. pp. 383-403.
110. Mohanty S.C., Dash R.R., Rout T. Free vibration of a functionally graded rotating Timoshenko beam using FEM // International Journal of Advanced Structural Engineering. 2013. V. 16, № 2. pp. 405-418.
111. Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S. An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams // Meccanica. 2010. V. 45, № 6. pp. 743-752.
112. Simsek M., Cansiz S. Dynamics of elastically connected double-functionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load // Composite Structures. 2012. V. 94, № 9. pp. 2861-2878.
113. Elishakoff I., Johnson V. Apparently the first closed-form solution of vibrating inhomogeneous beam with a tip mass // Journal of Sound and Vibration. 2005. V. 286, № 4-5. pp. 1057-1066.
114. Wu J.S., Chen D.W. Bending vibrations of wedge beams with any number of point masses // Journal of Sound and Vibration. 2003. V. 262. pp. 1073-1090.
115. Wu J.S., Chiang L.K. Free vibrations of solid and hollow wedge beams with rectangular or circular cross-sections and carrying any number of point masses // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2004. V. 60. pp. 695-718.

116. Rossi R. E., Laura A. A., Gutierrez R. H. A note on transverse vibrations of a Timoshenko beam of non-uniform thickness clamped at one end and carrying a concentrated mass at the other // Journal of Sound and Vibration. 1990. V. 143. pp. 491-502.

117. Gorman D.J. Free vibration analysis of beams and shafts. New York: Wiley, 1975.

118. Hao Z., Erbil A., Ayazi F. An analytical model for support loss in micromachined beam resonators with in-plane flexural vibrations // Sensors and Actuators. 2003. V. A 109. pp. 156-164.

119. Tsai H.C., Fang W. Determining the Poisson's ratio of thin film materials using resonant method // Sensors and Actuators. 2003. V. A 103. pp. 377-383.

120. Wang J., Lee P.C.Y., Bailey D.H. Thickness-shear and flexural vibrations of linearly contoured crystal strips with multiprecision computation // Computers and Structures. 1999. V. 70. pp. 437-445.

121. Johnson H.T., Prevot L. Modeling of acoustic-structural coupling in a MEMS hydrophone // Proceedings of International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems. V. 318. 2000. pp. 261-264.

122. Beam-type dynamic vibration absorber comprised of free-free beam / K. Kawazoe, I. Kono, T. Aida [and others] // Journal of Engineering Mechanics. 1998. V. 124, № 4. pp. 476-479.

123. Modeling and design of composite free-free beam piezoelectric resonators / A.T. Ferguson, L. Li, V.T. Nagaraj [and others] // Sensors and Actuators. 2005. V. A 118. pp. 63-69.

124. VHF free-free beam high-Q micromechanical resonators / K. Wang, Y. Yu, A.-C. Wong [and others] // Technical Digest of the 12th International IEEE Micro Electro Mechanical Systems Conference. Orlando: 1999. January. pp. 453-458.

125. Lakes R.S. Viscoelastic measurement techniques // Review of Scientific Instruments. 2004. V. 75, № 4. pp. 797-810.
126. Garcia E., Inman D. Modeling of the slewing control of a flexible structure // American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal of Guidance. 1991. V. 14. pp. 736-743.
127. Kopmaz O., Anderson S. On the eigenfrequencies of a flexible arm driven by a flexible shaft // Journal of Sound and Vibration. 2001. V. 240, № 4. pp. 679-704.
128. Kang M.S., Yoon W.H. Acceleration feedforward control in active magnetic bearing system subject to base motion by filtered-X LMS algorithm // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2006. V. 14, № 1. pp. 134-140.
129. Agrawal A.K. Seismic response of shear-core with sliding support to bi-directional ground excitation // Structural Design of Tall Buildings. 1999. V. 8. pp. 37-56.
130. Dudchenko S.V. Damping of a seismically isolated building by dry-friction wedgeblocks // Journal of Mathematical Sciences. 2001. V. 103, № 2. pp. 169-173.
131. Farchaly S.H., Shebl M.G. Exact frequency and mode shape formulae for studying vibration and stability of Timoshenko beam system // Journal of Sound and Vibration. 1995. V. 180, № 2. pp. 205-227.
132. Lake M.S., Peterson L.D., Mikulas M.M. Space structures on the back of an envelope: John Hedgepeth's approach to design // Proceedings of the 44th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference / American Institute of Aeronautics and Astronautics. Norfolk: AIAA-2003, 2003. April. P. 1448.

133. Andrianov A.I., Hermans A.J. Hydroelasticity of a circular plate on water of finite or infinite depth // Journal of Fluids and Structures. 2005. V. 20. pp. 719-733.
134. Li Q.S., Fang J.Q., Jeary A.P. Free Vibration Analysis of Cantilevered Tall Structures under Various Axial Loads // Engineering Structures. 2000. V. 22. pp. 525-534.
135. Li Q.S. Flexural Free Vibration of Cantilevered Structures of Variable Stiffness and Mass // Structural Engineering and Mechanics. 1999. V. 8, № 3. pp. 243-256.
136. Li Q.S. An exact Approach for Free Flexural Vibration of Multi-step Non-uniform Beams // Journal of Vibration and Control. 2000. V. 6. pp. 963-983.
137. Korqingskee E.L. Vibration of Tall Buildings // Moscow Press. 1953. pp. 25-36.
138. Ishizaki H., Hatakeyan N. Experimental and Numerical Studies on Vibrations of Buildings // Proceedings of the 2 nd International Conference on Earthquake Engineering. 1964. pp. 569-674.
139. Jeary A.P. Designer's Guide to the Dynamic Response of Structures // E & EN Spon, London, U.K. 1997. pp. 120-141.
140. Zalk K.A. Simpli?ed Method for Calculation of the Natural Frequencies of Wall-Frame Buildings // Engineering Structures. 2001. V. 23. pp. 1544-1555.
141. Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W. Vibration Problems in Engineering. Fourth issue. New York: John Wiley, 1974. p. 453-455.
142. Romano F. Deflection of Timoshenko Beam with Varying Cross Section // International Journal of Mechanical Science. 1996. V. 38, № 8-9. pp. 1017-1035.

143. Rahgozar R., Safari H., Kaviani P. Free vibration of tall buildings using Timoshenko beams with variable cross-section // Structures Under Shock and Impact VIII / eds. N. Jones, C. A. Brebbia. Ashurst, New Forest, England: WIT Press, 2004.

144. Zhou D. A general solution to vibrations of beams on variable winkler elastic foundation // Computers & Structures. 1993. V. 47, № 1. pp. 83-90.

145. Lee S.Y., Lin S.M. Vibrations of elastically restrained non-uniform Timoshenko beams // Journal of Sound and Vibration. 1995. V. 184, № 3. pp. 403-415.

146. Sen Y.L., Yaw K. Huel. Free vibrations of non-uniform beams resting on non-uniform elastic foundation with general elastic end restraints // Computers & Structures. 1990. V. 34, № 3. pp. 421-429.

147. Rao S. Ramalingerswara, Ganesan N. Dynamic response of tapered composite beams using higher order shear deformation theory // Journal of Sound and Vibration. 1995. V. 187, № 5. pp. 737-756.

148. Calim F.F. Free and forced vibrations of non-uniform composite beams // Computers & Structures. 2009. V. 88, № 3. pp. 413-423.

149. Wang R.T.. Vibration of multi-span Timoshenko beams to a moving force // Journal of Sound and Vibration. 1997. V. 207, № 5. pp. 731-742.

150. Abu-Hilal M., Mohsen M. Vibration of beams with general boundary conditions due to a moving harmonic load // Journal of Sound and Vibration. 2000. V. 232, № 4. pp. 703-717.

151. Pakar M.B. Accurate analytical solution for nonlinear free vibration of beams // Structural Engineering and Mechanics. 2012. V. 43, № 3. pp. 337-347.

152. Tong X., Tabarrok B., Yeh K.Y. Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section // Journal of Sound and Vibration. 1995. V. 186, № 5. pp. 821-835.

153. Sapountzakis E. J., G.Mokos V. Nonuniform torsion of bars of variable cross section // Computers and Structures. 2004. V. 82, № 9-10. pp. 703-715.

154. Sapountzakis E. J. Torsional vibrations of composite bars of variable cross-section by BEM // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2005. V. 194, № 18-20. pp. 2127-2145.

155. Banerjee J. R., Su H., Jackson D. R. Free vibration of rotating tapered beams using the dynamic stiffness method // Journal of Sound and Vibration. 2006. V. 298, № 4-5. pp. 1034-1054.

156. Shin Y. J., Kwon K. M., Yun J. H. Vibration analysis of a circular arch with variable cross section using differential transformation and generalized differential quadrature // Journal of Sound and Vibration. 2008. V. 309, № 1-2. pp. 9-19.

157. Greenberg L., Marletta M. The code SLEUTH for solving fourth-order Sturm-Liouville problemss // ACM Transactions on Mathematical Software. 1997. V. 23, № 4. pp. 453-493.

158. Bayley P.B., Everitt W.N., Zettl A. Computing eigenvalues of singular Sturm-Liouville problems // Results in Mathematics. 1991. V. 20.

159. Eigenvalue and eigenfunction computations for Sturm-Liouville problems / P.B. Bayley, B.S. Garbow, H.G. Kaper [è äð.] // ACM Transactions on Mathematical Software. 1991. V. 17, № 4. pp. 491-499.

160. Greenberg L., Marletta M. Numerical methods for higher order Sturm-Liouville problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. V. 125. pp. 367-383.

161. Shampine L.F., Muir P.H., Xu H. A user-friendly Fortran BVP solver // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics. 2006. V. 1, № 2. pp. 201-217.

162. To C.W.S. Higher order tapered beam finite elements for vibration analysis // Journal of Sound and Vibration. 1979. V. 63. pp. 33-50.
163. Rouch K.E., Kao J.S. A tapered beam finite element for rotor dynamics analysis // Journal of Sound and Vibration. 1979. V. 63. pp. 119-140.
164. Greenhill L.M., Bickford W.B., Nelson H.D. A conical beam finite element for rotor dynamics analysis // Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. 1985. V. 107. pp. 421-430.
165. Genta G., Gugliotta A. A conical element for finite element rotor dynamics // Journal of Sound and Vibration. 1988. V. 120. pp. 175-182.
166. Cleghorn W.L., Tabarrok B. Finite element formulation of a tapered Timoshenko beam for free lateral vibration analysis // Journal of Sound and Vibration. 1992. V. 152. pp. 461-470.
167. Wang G., Wereley N.M. Free vibration analysis of rotating blades with uniform taper // AIAA Journal. 2004. V. 42. pp. 2429-2437.
168. Banerjee R., Ewen J. Dynamic stiffness formulation using Timoshenko theory for free vibration of rotating beams // 48 th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials. Honolulu, Hawaii: 2007.
169. Babu G.J., Ganguli R. New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams // International Journal of Mechanical Sciences. 2008. V. 50. pp. 578-588.
170. Gunda J.B., Gupta R.K., Ganguli R. Hybrid stiff-string-polynomial basis functions for vibration analysis of high speed rotating beams // Computers & Structures. 2009. V. 87. pp. 254-265.
171. Attarnejad R., Shahba A. Basic displacement functions for centrifugally stiffened tapered beams // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 2009. V. 27. pp. 1385-1397.

172. Yardimoglu B. A novel finite element model for vibration analysis of rotating tapered Timoshenko beam of equal strength // Finite Elements in Analysis and Design. 2010. V. 46. pp. 838-842.

173. Shahba A., Attarnejad R., Hajilar S. Free vibration and stability of axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams // Shock and Vibration. 2011. V. 18. pp. 683-696.

174. Gimena F. N., Gonzaga P., Gimena L. 3D-curved beam element with varying cross-sectional area under generalized loads // Engineering Structures. 2008. V. 30, № 2. pp. 404-411.

175. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. Beam Structures: Classical and Advanced Theories. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2011.

176. Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries / E. Carrera, G. Giunta, P. Nali [è äð.] // Computers and Structures. 2010. V. 88, № 5-6. pp. 283-293.