Ортогональная обработка сигналов с использованием математических моделей целочисленных вейвлет-преобразований, реализованных в модулярных кодах классов вычетов

И.А. Калмыков, Н.К. Чистоусов, Н.И. Калмыкова, Д.В. Духовный

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь

Аннотация: Для повышения эффективной работы низкоорбитальных систем спутникового интернета (и обеспечения высокосортного обмена данными) широко используются системы, реализованные с использованием методов OFDM, базирующихся на ортогональном частотном мультиплексировании. Применение методов OFDM позволяет расширить полосу пропускания радиоканала на основе повышения спектральной эффективности. Для этого в системах OFDM применяют ортогональное преобразование сигналов с использованием быстрого преобразования Фурье. Чтобы уменьшить время, затрачиваемое на цифровую обработку сигнала, в статье рекомендуется перейти к целочисленным дискретным вейвлет-преобразованиям (ЦДВП) сигналов, реализованные в модулярных кодах классов вычетов (МККВ). Научная новизна работы состоит в том, что на основе интеграции методов построения дискретных вейвлет-преобразований и методов разработки модулярных кодов, будут созданы математические модели ДВП, реализованные в МККВ, применение которых обеспечит снижение времени выполнения обработки сигналов в системах, поддерживающих методы OFDM. Это будет достигнуто благодаря распараллеливанию арифметических операций по основаниям модулярного кода. При этом использование малоразрядных операндов позволяет перейти от выполнения операций умножения, сложения и вычитаний в МККВ к выборке данных из LUT-таблиц. Таким образом, разработка математических моделей ЦДВП, реализованных в МККВ, является актуальной задачей.

Ключевые слова: системы OFDM, дискретное вейвлет-преобразование, параллельное кодирование, модулярный код классов вычетов.

Введение

Уровень развития современного общества во многом предопределен множеством информационных технологий (ИТ), которые широко используются во всех сферах. Так, поскольку множество ИТ связано с использованием информационно-коммуникационной сети Интернет, то в настоящее время решается задача разработки и внедрения низкоорбитальных систем спутникового интернета (НССИ). Только НССИ при минимальных финансовых затратах по сравнению с другими средствами связи способны обеспечить широкополосный доступ в Интернет всем жителям Крайнего Севера. Примером такой системы выступает развернутая версия StarLink, которая в настоящее время функционирует с использованием свыше 2000 низкоорбитальных спутников [1, 2]. В работах [3, 4] предлагается для организации связи в системе StarLink использовать технологию ортогонального частотного мультиплексирования (OFDM). Выбор методов OFDM связан с тем, что за счет повышения спектральной эффективности происходит расширение полосы пропускания радиоканала, что способствует увеличению скорости передачи данных. Полученный результат достигается за счет применения быстрого преобразования Фурье (БПФ) в системах OFDM [5-7]. Однако использование метода БПФ при ортогональной обработке сигнала не позволяет обеспечить минимальное время на выполнение данной процедуры, что негативно сказывается на скорости передачи данных. Сократить время на обработку сигнала возможно за счет выполнения параллельных вычислений с использованием базиса разложения, который имеет более компактный набор носителей, чем при использовании БПФ. Решить данную задачу возможно путем интеграции методов построения дискретных вейвлет-преобразований (ДВП) и методов разработки модулярных кодов классов вычетов (МККВ). Поэтому, синтез математических моделей целочисленных ДВП, реализованных в МККВ, является актуальной задачей.

Основная часть. Цель исследования.

Использование методов цифровой обработки сигналов на основе БПФ не позволяет обеспечить минимальное время ортогонального преобразования. Это связано с тем, что вычисления реализуются в поле комплексных чисел. В этом случае, для выполнения базовой процедуры «бабочки» требуется осуществить 4 операции умножения и 6 операций сложения. Применение дискретного вейвлет-преобразования позволяет уменьшить количество операций при ортогональном преобразовании сигналов. Дальнейшее сокращение цифровой обработки сигналов возможно за счет реализации ДВП в модулярном коде. Применение МККВ обеспечивает параллельные вычисления по его основаниям, а также использование табличной реализации модульных операций. Уменьшение времени на обработку сигналов позволит повысить скорость передачи данных в системах OFDM, используемых в НССИ. Цель работы – снизить временные затраты на цифровую обработку сигналов в системах, поддерживающих методы OFDM за счет использования математических моделей ЦДВП, выполненных в МККВ.

Материал и методы исследования

1. Дискретное вейвлет-преобразование

В настоящее время все множество вейвлет-преобразований (ВП) можно разбить на две основные группы [8-16]. Основу первой группы составляют непрерывные ВП. При использовании таких преобразований исходный сигнал, обладающий конечной энергией, представляется непрерывным множеством базисных функций для заданных интервалов частот, имеющих вид $[f, 2f]$, где $f > 0$. В этом случае базовая функция, которая зависит от проводимых сдвигов во времени (параметр b) и применяемого масштаба времени (параметр a), имеет вид:

$$\psi_{(a,b)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right). \qquad (1)$$

Базис, представленный выражением (1), может быть получен из материнского вейвлета $\psi(x)$ путем непрерывных масштабных преобразований с различными значениями параметра a и переносов b. Тогда прямое непрерывное ВП входного сигнала *S(t)* определяется выражением:

$$W_s(a, b) = (S(t), \psi_{(a,b)}(x)) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dt, \qquad (2)$$

где $(\circ, \circ)$ – операция скалярного произведения.

Обратное непрерывное ВП задается выражением:

$$S(t)=\frac{1}{C_{\psi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_S\,(a,\,b)(t)\psi_{ab}\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}, \tag{3}$$

где C_{ψ} – нормирующий коэффициент.

Данный коэффициент определяется:

$$C_{\psi}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\Psi(w)\right|^2\left|w\right|^{-1}dw, \tag{4}$$

где $\Psi(w)$ – фурье-преобразование вейвлета $\psi(x)$.

Во вторую группу входят дискретные ВП. В этом случае дискретный сигнал ДВП представляют собой кортеж наборов масштабов и переносов вейвлета [14-16]. При использовании ДВП сигнал можно разложить на две функции. Первая функция является аппроксимирующей $A_m(t)$. Вторая представляет собой набор детализирующих функций $D_m(t)$. В этом случае справедливо:

$$S(t)=A_m(t)+\sum_{j=1}^{m}D_m(t). \tag{5}$$

При этом, при использовании ДВП, можно изменять уровень детализации m. Данный процесс можно представить следующим образом. Пусть задан сигнал $S(t)\in V_0$, который при m = 0, можно представить:

$$S(t)=A_0(t)+\sum_{k}a_{0k}\varphi_{0k}(t), \tag{6}$$

где $a_{0k}=a_k=S(t)$ – аппроксимирующие коэффициенты при m = 0; $\varphi_{0k}(t)$ – масштабирующая функция. При увеличении уровня, то есть при m = 1, исходный сигнал разлагается на две составляющие, которые принадлежат подпространствам V_1, W_1 соответственно. Имеем:

$$S(t)=A_1(t)+D_1(t)=\sum_{k}a_{1k}\varphi_{1k}(t)+\sum_{k}d_{1k}\psi_{1k}(t). \tag{7}$$

В результате, вычислены две последовательности аппроксимирующих a_{1k} и детализирующих d_{1k} коэффициентов. Затем составляющая $A_1(t)$ снова подвергается разложению на две составляющих $A_2(t)$ и $D_2(t)$. Тогда, для m-го уровня разложения получаем:

$$S(t) = A_m(t) + D_m(t) = \sum_k a_{mk}\varphi_{mk}(t) + \sum_k d_{mk}\psi_{mk}(t). \qquad (8)$$

2. Модулярные коды классов вычетов

Для построения модулярного кода классов вычетов необходимо выбрать взаимно простые числа p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это основания кода МККВ. Их кортеж определяет рабочий диапазон кода:

$$P_{раб} = \prod_{i=1}^{n} p_i \ . \qquad (9)$$

Согласно [17-21] в МККВ целое число X представляется в виде кортежа остатков:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad (10)$$

где $x_i \equiv X \bmod p_i$; $X < P_{раб_i}$; $i = 1, 2, .., n$.

Используя изоморфизм, порожденный китайской теоремой об остатках, операции суммирования, вычитания и умножения двух комбинаций МККВ можно представить:

$$X + Y = \left(\left|x_1 + y_1\right|_{p_1}^{+}, \left|x_2 + y_2\right|_{p_2}^{+}, \ldots, \left|x_n + y_n\right|_{p_n}^{+}\right), \qquad (11)$$

$$X - Y = \left(\left|x_1 - y_1\right|_{p_1}^{+}, \left|x_2 - y_2\right|_{p_2}^{+}, \ldots, \left|x_n - y_n\right|_{p_n}^{+}\right), \qquad (12)$$

$$X \cdot Y = \left(\left|x_1 \cdot y_1\right|_{p_1}^{+}, \left|x_2 \cdot y_2\right|_{p_2}^{+}, \ldots, \left|x_n \cdot y_n\right|_{p_n}^{+}\right), \qquad (13)$$

где $y_i \equiv Y \bmod p_i$; $Y < P_{раб_i}$; $i = 1, 2, .., n$.

Проведя анализ равенств (11) - (13), можно заметить, что вычисления в МККВ происходят параллельно, по основаниям кода. При этом переноса из одного основания в другое нет. Кроме того, остатки, которые составляют кодовую комбинацию МККВ, имеют меньшую разрядность, чем целые числа *X* и *Y*. Это означает возможность замены данных модульных операций на процедуры выборки из LUT-таблиц. Так как в основе ДВП лежат операции сложения и умножения, то их можно реализовать в МККВ, что позволит повысить скорость вычислений.

Однако, для вычислений с помощью МККВ, необходимо выполнить две немодульные операции. Первой операцией является преобразование позиционного двоичного кода (ПДК) в МККВ. Анализ работ [7-21] показал, что такое преобразование можно реализовать, используя следующие алгоритмы:

– алгоритм понижения разрядности;

– алгоритм суммирования степеней кода;

– алгоритм распределённой арифметики.

При реализации алгоритма понижения разрядности перевод ПДК-МККВ представляет собой итерационный процесс [19]. Пусть задана двоичная комбинация целого числа:

$$X = 2^{G-1} X_{G-1} + 2^{G-2} X_{G-2} + \ldots + 2^1 X_1 + 2^0 X_0, \qquad (14)$$

где $X_j = \{0, 1\}$; $j = 0, \ldots, G-1$.

На каждом из этапов определяется сумма остатков, которые соответствуют степеням двойки с ненулевыми коэффициентами в ПДК, а также сравнение с модулем:

$$X^*(L) = \sum_{j=0}^{G-1} X_j Y_j < X(L-1). \qquad (15)$$

где $Y_j \equiv 2^j \bmod p_i$; $L = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – номер итерации; $X(0) = X$.

Итерации выполняются до тех пор, пока не получится сумма, которая меньше основания. Это остаток числа *X* по модулю p_i,

$$x_i = X^*(L) < p_i. \qquad (16)$$

Меньшими временными затратами обладает алгоритм суммирования степеней кода [18, 21]. В этом случае остаток вычисляется поразрядно на основе выражения:

$$x_i = \sum_{j=0}^{G-1} X_j 2^j \bmod p_i \,, \tag{17}$$

где $i = 1, 2, 3,..,k$.

Дальнейшее сокращение времени необходимого на получение остатка можно достичь с помощью алгоритма распределенной арифметики [18-21]. В этом случае двоичная комбинация делится на блоки и выполняется выражение:

$$\left|X\right|^{+}_{m_i} = \left|\left|V_C\right|^{+}_{m_i} + \left|V_{C-1}\right|^{+}_{m_i} + \ldots + \left|V_1\right|^{+}_{m_i}\right|^{+}_{m_i}, \tag{18}$$

где $\left|V_C\right|^{+}_{m_i} = \left|2^{G-1} X_{G-1} + \ldots + 2^{G-V} X_{G-V}\right|^{+}_{m_i}$; $\left|V_{C-1}\right|^{+}_{m_i} = \left|2^{G-V-1} X_{G-V-1} + \ldots + 2^{G-2V} X_{G-2V}\right|^{+}_{m_i}$; $\left|V_1\right|^{+}_{m_i} = \left|2^{V-1} X_{V-1} + \ldots + 2^{0} X\right|^{+}_{m_i}$; C – количество блоков; V – количество разрядов в блоке.

При этом, для вычисления остатка надо заранее определить остатки этих блоков:

$$\begin{aligned}
&\left|V_1\right|^{+}_{m_i} = \left|2^{V-1} X_{V-1} + \ldots + 2^{0} X_0\right|^{+}_{m_i} = \left|\left|2^{0}\right|^{+}_{m_i} (X^{1}_{V-1} + \ldots + X^{1}_{0})\right|^{+}_{m_i}, \\
&\vdots \\
&\left|V_C\right|^{+}_{m_i} = \left|2^{G-1} X_{G-1} + \ldots + 2^{G-V} X_{G-V}\right|^{+}_{m_i} = \left|\left|2^{G-V}\right|^{+}_{m_i} (X^{C}_{G-1} + \ldots + X^{C}_{G-V})\right|^{+}_{m_i},
\end{aligned} \tag{19}$$

где $(X^{j}_{V-1} + \ldots + X^{j}_{0})$ – код j-го блока; $j = 1,\ldots,C$.

В качестве второй обязательной операцией выступает обратное преобразование МККВ-ПДК. В работах [17-21] показано, что в большинстве случаев при выполнении этого преобразования применяется китайская теорема об остатках:

$$\begin{aligned} X &= \left(x_1 B_1 + x_2 B_2 + \ldots + x_{k-1} B_{k-1} + x_k B_k\right) \operatorname{mod} P_{раб} = \\ &= x_1 B_1 + x_2 B_2 + \ldots + x_{k-1} B_{k-1} + x_k B_k - r_X P_{раб}, \end{aligned} \tag{20}$$

где $B_i = P_i m_i = \dfrac{P_{раб}}{p_i} m_i$ – ортогональный базис; $B_i \equiv 1 \operatorname{mod} p_i$; m_i – вес ортогонального базиса; $r_X = 0, 1, \ldots$ – ранг числа.

Данные немодульные операции будут реализованы при проведении сравнительного анализа с использованием FPGA.

3. Математические модели ДВП в модулярных кодах классов вычетов

В настоящее время среди ДВП, используемых для кратномасштабного анализа, широко используются преобразования Добеши. Рассмотрим математические модели ДВП Добеши, реализованные в МККВ. В этом случае масштабирующая функции $\varphi(x)$ и вейвлет-функция $\psi(x)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \left(\left|\sqrt{2}\right|_{p_1}^{+} \sum\limits_{L=1}^{U} \left|h_L\right|_{p_1}^{+} \left|\varphi(2x-L)\right|_{p_1}^{+}\right) mod p_1 \\ \varphi_2(x) = \left(\left|\sqrt{2}\right|_{p_2}^{+} \sum\limits_{L=1}^{U} \left|h_L\right|_{p_2}^{+} \left|\varphi(2x-L)\right|_{p_2}^{+}\right) mod p_2 \\ \vdots \\ \varphi_n(x) = \left(\left|\sqrt{2}\right|_{p_n}^{+} \sum\limits_{L=1}^{U} \left|h_L\right|_{p_n}^{+} \left|\varphi(2x-L)\right|_{p_n}^{+}\right) mod p_n \end{cases} \tag{21}$$

где U – длина ДВП; h_L – коэффициенты НЧ фильтра; $\left|h_L\right|_{p_i}^{+} = h_L \operatorname{mod} p_i$; $i = 1, 2, .., n$,

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \left(\left|\sqrt{2}\right|_{p_1}^{+} \sum\limits_{L=1}^{U} \left|g_L\right|_{p_1}^{+} \left|\varphi(2x-L)\right|_{p_1}^{+}\right) mod p_1 \\ \psi_2(x) = \left(\left|\sqrt{2}\right|_{p_2}^{+} \sum\limits_{L=1}^{U} \left|g_L\right|_{p_2}^{+} \left|\varphi(2x-L)\right|_{p_2}^{+}\right) mod p_2 \\ \vdots \\ \psi_n(x) = \left(\left|\sqrt{2}\right|_{p_n}^{+} \sum\limits_{L=1}^{U} \left|g_L\right|_{p_n}^{+} \left|\varphi(2x-L)\right|_{p_n}^{+}\right) mod p_n \end{cases} \tag{22}$$

где g_L – коэффициенты ВЧ фильтра; $\left|g_L\right|_{p_i}^{+} = g_L \operatorname{mod} p_i$; $i = 1, 2, .., n$.

В МККВ должны выполняться свойства, которые имеет ДВП при $j \neq m$

$$\begin{cases} \left(\left|\varphi_{L,j}(x)\right|_{p_1}^{+} \left|\varphi_{L,m}(x)\right|_{p_1}^{+} \right) \equiv 0 \bmod p_1, \\ \vdots \\ \left(\left|\varphi_{L,j}(x)\right|_{p_n}^{+} \left|\varphi_{L,m}(x)\right|_{p_n}^{+} \right) \equiv 0 \bmod p_n. \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \left(\left|\psi_{L,j}(x)\right|_{p_1}^{+} \left|\psi_{L,m}(x)\right|_{p_1}^{+} \right) \equiv 0 \bmod p_1, \\ \vdots \\ \left(\left|\psi_{L,j}(x)\right|_{p_n}^{+} \left|\psi_{L,m}(x)\right|_{p_n}^{+} \right) \equiv 0 \bmod p_n. \end{cases} \quad (24)$$

При выполнении данных условий будут определены ортогональные функции, представленные в МККВ. Значит, для них справедливо условие:

$$\begin{cases} \left(\left|\varphi_{L,j}(x)\right|_{p_1} \left|\psi_{L,j}(x)\right|_{p_1}^{+} \right) = 0 \bmod p_1, \\ \vdots \\ \left(\left|\varphi_{L,j}(x)\right|_{p_n} \left|\psi_{L,j}(x)\right|_{p_n}^{+} \right) = 0 \bmod p_n. \end{cases} \quad (25)$$

Тогда математические модели ДВП Добеши, реализованные в модулярных кодах класса вычетов представляют собой линейные комбинации функций $\left|\varphi(x)\right|_{p_i}^{+}$ и $\left|\psi(x)\right|_{p_i}^{+}$. При этом используются коэффициенты аппроксимации a_{JL} и коэффициенты детализации d_{jL}, полученные при реализации *j*-го уровня разложения сигнала, которые также представлены в МККВ. В этом случае получаем:

$$\begin{aligned} \left|S(x)\right|_{p_1}^{+} &= \left| \sum_L a_{j,L}^{1} \varphi_{j,L}^{1}(x) + \sum_L d_{j,L}^{1} \psi_{j,L}^{1}(x) + \sum_L d_{j-1,L}^{1} \psi_{j-1,L}^{1}(x) + \ldots + \sum_L d_{1,L}^{1} \psi_{1,L}^{1}(x) \right|_{p_1}^{+}, \\ &\vdots \\ \left|S(x)\right|_{p_n}^{+} &= \left| \sum_L a_{j,L}^{n} \varphi_{j,L}^{n}(x) + \sum_L d_{j,L}^{n} \psi_{j,L}^{n}(x) + \sum_L d_{j-1,L}^{n} \psi_{j-1,L}^{n}(x) + \ldots + \sum_L d_{1,L}^{n} \psi_{1,L}^{n}(x) \right|_{p_n}^{+}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $j = \log_2(N)$ – число уровней, используемых при разложении; $L = 0,1,\ldots N-1$ – сдвиги в ДВП; $\psi_{j,L}^{i} \equiv \psi_{j,L} \bmod p_i$; $\varphi_{j,L}^{i} \equiv \varphi_{j,L} \bmod p_i$; $d_{j,L}^{i} \equiv d_{j,L} \bmod p_i$; $a_{j,L}^{i} \equiv a_{j,L} \bmod p_i$; $i = 1,2,..,n$.

Более компактная запись математических моделей Добеши, реализованных в МККВ, имеет вид:

$$\begin{aligned} \left|S(x)\right|_{p_1}^{+} &= \left|\sum_L a_{J,L}^{1}\varphi_{j,L}^{1}(x)+\sum_{j=1}^{J}\sum_L d_{j,L}^{1}\psi_{j,L}^{1}(x)\right|_{p_1}^{+}, \\ &\vdots \\ \left|S(x)\right|_{p_n}^{+} &= \left|\sum_L a_{J,L}^{n}\varphi_{j,L}^{n}(x)+\sum_{j=1}^{J}\sum_L d_{j,L}^{n}\psi_{j,L}^{n}(x)\right|_{p_n}^{+}. \end{aligned} \tag{27}$$

Рассмотрим разработанную математическую модель выполнения преобразования Добеши-4 на основе модулярных кодов класса вычетов. Очевидно, что для реализации разработанной модели надо коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4 сначала представить в МККВ. Для этого воспользуемся системой уравнений:

$$\begin{cases} \left|\left|c_1^2\right|_{p_i}^{+}+\left|c_2^2\right|_{p_i}^{+}+\left|c_3^2\right|_{p_i}^{+}+\left|c_4^2\right|_{p_i}^{+}\right|_{p_i}^{+} \equiv 1 \bmod p_i, \\ \left|\left|c_1\right|_{p_i}^{+}\left|c_3\right|_{p_i}^{+}+\left|c_2\right|_{p_i}^{+}\left|c_4\right|_{p_i}^{+}\right|_{p_i}^{+} \equiv 0 \bmod p_i, \\ \left|1\cdot\left|c_4\right|_{p_i}^{+}-1\cdot\left|c_3\right|_{p_i}^{+}+1\cdot\left|c_2\right|_{p_i}^{+}-1\cdot\left|c_1\right|_{p_i}^{+}\right|_{p_i}^{+} \equiv 0 \bmod p_i, \\ \left|1\cdot\left|c_4\right|_{p_i}^{+}-2\cdot\left|c_3\right|_{p_i}^{+}+3\cdot\left|c_2\right|_{p_i}^{+}-4\cdot\left|c_1\right|_{p_i}^{+}\right|_{p_i}^{+} \equiv 0 \bmod p_i, \end{cases} \tag{28}$$

где $i = 1, 2, .., n$.

В этом случае коэффициенты Добеши-4, представленные в МККВ, будут равны:

$$\left|c_1\right|_{p_i}^{+} = \left|\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right|_{p_i}^{+}, \ \left|c_2\right|_{p_i}^{+} = \left|\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right|_{p_i}^{+}, \ \left|c_3\right|_{p_i}^{+} = \left|\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right|_{p_i}^{+}, \ \left|c_4\right|_{p_i}^{+} = \left|\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right|_{p_i}^{+}. \tag{29}$$

Используя данные коэффициенты, можно получить матрицу, позволяющую выполнить прямое преобразование Добеши-4 на основе МККВ, при обработке кортежа, состоящего из 8 отсчетов.

$$DB_4 \bmod p_i = \begin{bmatrix} \left|c_1\right|_{p_i}^{+} & \left|c_2\right|_{p_i}^{+} & \left|c_3\right|_{p_i}^{+} & \left|c_4\right|_{p_i}^{+} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left|c_4\right|_{p_i}^{+} & \left|-c_3\right|_{p_i}^{+} & \left|c_2\right|_{p_i}^{+} & \left|-c_1\right|_{p_i}^{+} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left|c_1\right|_{p_i}^{+} & \left|c_2\right|_{p_i}^{+} & \left|c_3\right|_{p_i}^{+} & \left|c_4\right|_{p_i}^{+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left|c_4\right|_{p_i}^{+} & \left|-c_3\right|_{p_i}^{+} & \left|c_2\right|_{p_i}^{+} & \left|-c_1\right|_{p_i}^{+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left|c_1\right|_{p_i}^{+} & \left|c_2\right|_{p_i}^{+} & \left|c_3\right|_{p_i}^{+} & \left|c_4\right|_{p_i}^{+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left|c_4\right|_{p_i}^{+} & \left|-c_3\right|_{p_i}^{+} & \left|c_2\right|_{p_i}^{+} & \left|-c_1\right|_{p_i}^{+} \\ \left|c_3\right|_{p_i}^{+} & \left|c_4\right|_{p_i}^{+} & 0 & 0 & 0 & 0 & \left|c_1\right|_{p_i}^{+} & \left|c_2\right|_{p_i}^{+} \\ \left|c_2\right|_{p_i}^{+} & \left|-c_1\right|_{p_i}^{+} & 0 & 0 & 0 & 0 & \left|c_4\right|_{p_i}^{+} & \left|-c_3\right|_{p_i}^{+} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

где $i = 1, 2, .., n$.

Тогда аппроксимирующие коэффициенты, представленные в МККВ, будут вычислены с помощью следующих выражений:

$$\begin{aligned} S_i(0) &= \left|a_1\right|_{p_i}^{+} = \left(s_i(0)\left|c_1\right|_{p_i}^{+} + s_i(1)\left|c_2\right|_{p_i}^{+} + s_i(2)\left|c_3\right|_{p_i}^{+} + s_i(3)\left|c_4\right|_{p_i}^{+}\right) \bmod p_i, \\ S_i(2) &= \left|a_2\right|_{p_i}^{+} = \left(s_i(2)\left|c_1\right|_{p_i}^{+} + s_i(3)\left|c_2\right|_{p_i}^{+} + s_i(4)\left|c_3\right|_{p_i}^{+} + s_i(5)\left|c_4\right|_{p_i}^{+}\right) \bmod p_i, \\ S_i(4) &= \left|a_3\right|_{p_i}^{+} = \left(s_i(4)\left|c_1\right|_{p_i}^{+} + s_i(5)\left|c_2\right|_{p_i}^{+} + s_i(6)\left|c_3\right|_{p_i}^{+} + s_i(7)\left|c_4\right|_{p_i}^{+}\right) \bmod p_i, \\ S_i(6) &= \left|a_4\right|_{p_i}^{+} = \left(s_i(0)\left|c_3\right|_{p_i}^{+} + s_i(1)\left|c_4\right|_{p_i}^{+} + s_i(6)\left|c_1\right|_{p_i}^{+} + s_i(7)\left|c_2\right|_{p_i}^{+}\right) \bmod p_i, \end{aligned} \quad (31)$$

где $S_i(j) \equiv S(j) \bmod p_i$; $s_i(j) \equiv s(j) \bmod p_i$; $i = 1, 2, .., n$.

В этом случае, детализирующие коэффициенты ДВП Добеши-4, вычисленные с помощью МККВ, будут определяться, исходя из выражений:

$$\begin{aligned} S_i(1) &= \left|d_1\right|_{p_i}^{+} = \left(s_i(0)\left|c_4\right|_{p_i}^{+} - s_i(1)\left|c_3\right|_{p_i}^{+} + s_i(2)\left|c_2\right|_{p_i}^{+} - s_i(3)\left|c_1\right|_{p_i}^{+}\right) \bmod p_i, \\ S_i(3) &= \left|d_1\right|_{p_i}^{+} = \left(s_i(2)\left|c_4\right|_{p_i}^{+} - s_i(3)\left|c_3\right|_{p_i}^{+} + s_i(4)\left|c_2\right|_{p_i}^{+} - s_i(5)\left|c_1\right|_{p_i}^{+}\right) \bmod p_i, \\ S_i(5) &= \left|d_1\right|_{p_i}^{+} = \left(s_i(4)\left|c_4\right|_{p_i}^{+} - s_i(5)\left|c_3\right|_{p_i}^{+} + s_i(6)\left|c_2\right|_{p_i}^{+} - s_i(7)\left|c_1\right|_{p_i}^{+}\right) \bmod p_i, \\ S_i(1) &= \left|d_1\right|_{p_i}^{+} = \left(s_i(0)\left|c_2\right|_{p_i}^{+} - s_i(1)\left|c_1\right|_{p_i}^{+} + s_i(6)\left|c_4\right|_{p_i}^{+} - s_i(7)\left|c_3\right|_{p_i}^{+}\right) \bmod p_i. \end{aligned} \quad (32)$$

В разработанной математической модели ДВП Добеши-4, реализованной в МККВ, используются отрицательные коэффициенты. Поэтому предлагается рабочий диапазон, величина которого определяется выражением (9), поделить на два поддиапазона. Первый поддиапазон

$\left[0, \frac{P_{раб}}{2} - 1\right]$ используется для размещения положительных чисел МККВ. Во втором поддиапазоне $\left[\frac{P_{раб}}{2}, P_{раб} - 1\right]$ размещаются отрицательные числа. Так как остатки в коде МККВ всегда должны быть положительными, то перемещение отрицательных чисел осуществляется следующим образом:

$$-S_i(j) = p_i - S_i(j). \tag{33}$$

Анализ работ [7-21] показывает, что наибольшее распространение среди оснований модулярных кодов получили числа вида $2^v - 1,\ 2^v,\ 2^v + 1$. Выбор данных оснований связан с тем, что, используя данные числа, можно относительно легко реализовать модульные операции. При этом может быть применена табличная реализация. В этом случае, применение LUT-таблиц позволяет перейти от выполнения этих операций к выборке данных [22]. Кроме того, применение чисел вида $2^v - 1,\ 2^v,\ 2^v + 1$позволяет при меньших аппаратурных и временных затратах выполнять немодульные операции. Во-первых, это прямое преобразование из позиционного двоичного кода в МККВ. Во-вторых, операция обратного преобразования из МККВ в ПДК.

Результаты исследования и их обсуждение

В современных НССИ для обеспечения высокоскоростного доступа к интернету используются OFDM-технологии. Так, StarLink реализует обмен данными с помощью сигналов OFDM, которые используют модуляцию 64 QAM [23]. В этом случае на вход модулятора должна подаваться восьмиразрядная комбинация, что соответствует восьмиразрядному входному отсчету. Структура сигнала OFDM: количество подканалов – 52, из них 48 информационных. Значит, для выработки сигнала OFDM, достаточно реализовать 64-точечное быстрое обратное дискретное преобразование Фурье.

Возьмем в качестве оснований МККВ числа $p_1 = 63, p_2 = 64, p_3 = 65$. Их рабочий диапазон составит $P_{раб} = 262080$. Таким образом, диапазон МККВ незначительно меньше $2^{18} = 262144$. Учитывая, что рабочий диапазон делится на две части для представления положительных и отрицательных чисел, выбираем разрядность коэффициентов ДВП Добеши не более 9 бит. Значение целочисленных коэффициентов Добеши-4 и их представление в МККВ представлено в таблице 1.

Таблица № 1

Коэффициенты ДВП Добеши-4

Коэффициенты Добеши-4	Целочисленные коэффициенты	$p_1 = 63$	$p_2 = 64$	$p_3 = 65$
$c_1 = 0{,}683027$	174	48	46	44
$c_2 = 1{,}1830127$	302	50	46	42
$c_3 = 0{,}3169873$	81	18	17	16
$c_4 = -0{,}1830127$	-46	17	18	19

Пусть четыре первых отсчетов входного сигнала равны $s(x) = \{110,\ 62,\ 15,\ 33, \ldots\}$. Тогда для данного входного вектора равен:

$$a_1 = s(0)c_1 + s(1)c_2 + s(2)c_3 + s(3)c_4 = \\ = 174 \cdot 110 + 302 \cdot 62 + 81 \cdot 15 - 46 \cdot 33 = 37561.$$

При этом детализирующий коэффициент для данного входного вектора:

$$d_1 = s(0)c_4 - s(1)c_3 + s(2)c_3 - s(3)c_4 = -11294$$

Найдем значения вычисленных коэффициентов в МККВ. Тогда аппроксимирующий коэффициент равен $a_1 = 37561 = (13,\ 57,\ 56)$, Так как детализирующий коэффициент - отрицательное число, то его необходимо представить в виде положительного. Тогда получаем $d_1 = P_{раб} - 11294 = 249461$. В этом случае: $d_1 = 249461 = (46,\ 34,\ 16)$.

Рассмотрим реализацию ЦДВП в МККВ. Представим входной вектор в коде МККВ.

$$s(x) = \{110,\ 62,\ 15,\ 33,\ldots\} = \{(47,46,45),(62,62,62),(15,15,15),(33,33,33)\ldots\}$$

Вычислим аппроксимирующий коэффициент по первому модулю $p_1 = 63$ модулярного кода:

$$S_1(0) = \left|a_1\right|_{p_1}^{+} = \left(s_1(0)\left|c_1\right|_{p_1}^{+} + s_1(1)\left|c_2\right|_{p_1}^{+} + s_1(2)\left|c_3\right|_{p_1}^{+} + s_1(3)\left|c_4\right|_{p_1}^{+}\right) \mathrm{mod}\, p_1 =$$
$$= (47\cdot 48 + 62\cdot 50 + 15\cdot 18 + 33\cdot 17)\,\mathrm{mod}\, 63 = 13.$$

Аналогичным образом вычисляем аппроксимирующий коэффициент по другим основаниям МККВ. Для второго основания $p_2 = 64$ получаем:

$$S_2(0) = \left|a_1\right|_{p_2}^{+} = \left(s_2(0)\left|c_1\right|_{p_2}^{+} + s_2(1)\left|c_2\right|_{p_2}^{+} + s_2(2)\left|c_3\right|_{p_2}^{+} + s_2(3)\left|c_4\right|_{p_2}^{+}\right) \mathrm{mod}\, p_2 =$$
$$= (46\cdot 46 + 62\cdot 46 + 15\cdot 17 + 33\cdot 18)\,\mathrm{mod}\, 64 = 57.$$

Для третьего основания $p_3 = 65$ имеем:

$$S_3(0) = \left|a_1\right|_{p_3}^{+} = \left(s_3(0)\left|c_1\right|_{p_3}^{+} + s_3(1)\left|c_2\right|_{p_3}^{+} + s_3(2)\left|c_3\right|_{p_3}^{+} + s_3(3)\left|c_4\right|_{p_3}^{+}\right) \mathrm{mod}\, p_3 =$$
$$= (45\cdot 44 + 62\cdot 42 + 15\cdot 16 + 33\cdot 19)\,\mathrm{mod}\, 64 = 56.$$

Тогда аппроксимирующий коэффициент в МККВ $a_1 = (13,\ 57,\ 56)$.

Вычислим детализирующий коэффициент по первому модулю $p_1 = 63$

$$S_1(1) = \left|d_1\right|_{p_1}^{+} = \left(s_1(0)\left|c_4\right|_{p_1}^{+} - s_1(1)\left|c_3\right|_{p_1}^{+} + s_1(2)\left|c_2\right|_{p_1}^{+} - s_1(3)\left|c_1\right|_{p_1}^{+}\right) \mathrm{mod}\, p_1 =$$
$$= (47\cdot 17 - 62\cdot 18 + 15\cdot 50 - 33\cdot 48)\,\mathrm{mod}\, 63 = 46.$$

Аналогичным образом вычисляем детализирующий коэффициент по другим основаниям МККВ. Для второго основания $p_2 = 64$ получаем:

$$S_2(1) = \left|d_1\right|_{p_2}^{+} = \left(s_2(0)\left|c_4\right|_{p_2}^{+} - s_2(1)\left|c_3\right|_{p_2}^{+} + s_2(2)\left|c_2\right|_{p_2}^{+} - s_2(3)\left|c_1\right|_{p_2}^{+}\right) \mathrm{mod}\, p_2 =$$
$$= (46\cdot 18 - 62\cdot 17 + 15\cdot 46 - 33\cdot 46)\,\mathrm{mod}\, 64 = 34.$$

Для третьего основания $p_3 = 65$ имеем:

$$S_3(1)=\left|d_1\right|_{p_3}^{+}=\left(s_3(0)\left|c_4\right|_{p_3}^{+}-s_3(1)\left|c_3\right|_{p_3}^{+}+s_3(2)\left|c_2\right|_{p_3}^{+}-s_3(3)\left|c_1\right|_{p_3}^{+}\right)\bmod p_3=$$
$$=(45\cdot 19-62\cdot 16+15\cdot 42-33\cdot 44)\bmod 64=16.$$

Тогда детализирующий коэффициент в МККВ $d_1=(46, 34, 16)$. Результаты вычислений совпали.

Рассмотрим временные затраты, которые требуются для выполнения цифровой обработки сигналов с использованием разработанной матмодели ЦДВП Добеши и быстрого алгоритма ДПФ. Для этого воспользуемся ПЛИС Kint ex UltraScale xcku 025. Исследование реализуются с помощью САПР Xillin Vivado HLS 2018. Прямое преобразование ПКД-МККВ реализовано на основе алгоритма распределенной арифметики. Табличная реализация арифметических операций в МККВ была выполнена с использованием внутренней памяти FPGA. При выполнении обратного преобразования из МККВ в ПДК использовалось выражение (19). При этом, для снижения схемных затрат была проведена модификация КТО, благодаря которой нет необходимости вычислять ранг числа.

Проведенный сравнительный анализ показал, что для реализации ОБПФ выбранного сигнала OFDM потребовалось 486 нс. Меньшими временными затратами обладают преобразования сигналов, которые реализуются с использованием ЦДВМ в поле $GF(262147)$. Для этого потребовалось 242 нс. При использовании разработанной математической модели ЦДВП Добеши-4 в МККВ временные затраты были равны 182 нс. Следовательно, за счет использования параллельных МККВ, время цифровой обработки сигналов в системах OFDM сократилось в 2,67 раза по сравнению с использованием БПФ и ОБПФ. А это, в свою очередь, позволит снизить временные затраты на генерацию сигнала OFDM и повысить скорость передачи информации в НССИ.

Выводы

Одним из способов повысить скорость передачи данных в низкоорбитальных группировках спутников выступает разработка и использование новых математических моделей цифровой обработки сигналов. В статье представлены модели, которые позволяют сократить временные затраты на обработку сигналов по сравнению с ОБПФ за счет интеграции теории построения ЦДВП и параллельных МККВ. Программно-аппаратная реализация на основе ПЛИС Kint ex UltraScale xcku 025, показала, что для выполнения ОБПФ выбранного сигнала OFDM потребовалось 486 нс. Меньшими временными затратами обладают преобразования сигналов, которые реализуются с использованием ЦДВМ в поле $GF(262147)$. Для этого потребовалось 242 нс. При использовании разработанной математической модели ЦДВП Добеши-4 в МККВ, временные затраты были равны 182 нс. Следовательно, за счет использования параллельных МККВ, время цифровой обработки сигналов в системах OFDM сократилось в 2,67 раза по сравнению с использованием БПФ и ОБПФ. А это, в свою очередь, позволяет снизить временные затраты на генерацию сигнала OFDM и повысить скорость передачи информации в НССИ.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00036, rscf.ru/project/23-21-00036/.

Литература

1. Shreehari H.S., Makam Supreeth Starlink Satellite Internet Service. International Journal of Research Publication and Reviews, 2022, Vol 3, no 6, pp. 4501-4504.

2. Edward, J. Oughton A review paper on, A Techno-Economic Framework for Satellite Networks Applied to Low Earth Orbit Constellations. Assessing Starlink, OneWeb and Kuiper, IEEE Access, vol. 9, October 2021, pp. 141611-141622.

3. Observations of Starlink Satellite-to-User Downlink / Software Defined Radio // Starlink Engineering. URL: reddit.com/r/StarlinkEngineering/comments/qwm1v5/observations_of_starlink_satellite_to_user/ (дата обращения: 10.02.2023).

4. Receiving Starlink Beacons with an RTL-SDR and LNB. URL: sgcderek.github.io/blog/starlink-beacons.html (дата обращения: 10.02.2023)

5. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумовм А.П. Технология OFDM. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2017 – 352 с.

6. Vamsidhar A. Performance Comparison of FFT and DWT based MIMO-OFDM Communication Systems / International Journal of Modern Trends in Engineering and Research (IJMTER), Volume 03, Issue 02, 2016. – pp. 204-210.

7. Yücel G., Altun A.A. Comparative Performance Analyses of FFT Based OFDM and DWT Based OFDM Systems / Journal of New Results in Science, 2016, №12. – pp. 272-287.

8. Шоберг, А.Г. Современные методы обработки изображений: модифицированное вейвлет-преобразование / Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2014. – 125 с.

9. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Издан. 3-е и допол. М.: Техносфера, 2012. – 427 с.

10. Grinsted A., Moore J.C., Jevrejeva S. Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series, Nonlin. Processes Geophys., 2014, 11, pp. 561–566.

11. Stark Hans-Georg Wavelets and signal processing. Springer International Publishing Switzerland. 2005 – 254 p.

12. Stark Hans-Georg Wavelets and signal processing. Springer International Publishing Switzerland. 2019. – 254 p.

13. Малла, С. Вейвлеты в обработке сигналов / М.: Горячая линия – Телеком, 2015. – 671 с.

14. Dw, E.F., Samijayani, O.N., Rahmatia, S., Astharini, D. and Gunawan, D. Design and Performance Investigation of Discrete Wavelet Transform (DWT) Based OFDM Using 4-PAM for Indoor VLC System// 7th International Conference on Information and Communication Technology (ICoICT), 2019, DOI: 10.1109/ICoICT.2019.8835217

15. Штарк, Г.Г. Применение вейвлетов для ЦОС / М.: Техносфера, 2007. – 192 с.

16. Воскобойников, Ю. Е. Вейвлет-фильтрации сигналов и изображений (с примерами в пакете MathCAD) / Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2015. – 188 с.

17. Omondi, A., Premkumar B. Residue Number Systems: Theory and Implementation / Imperial College Press. – UK, 2007. – 293 p.

18. Ananda, Mohan Residue Number Systems. Theory and Applications / Ananda, Mohan. – Springer International Publishing Switzerland, 2016. – 351 p.

19. Червяков Н.И., Коляда А.А., Ляхов П.А. Модулярная арифметика и ее приложения в инфокоммуникационных технологиях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 400 с.

20. Калмыков И.А., Емарлукова Я.В., Гиш Т.А., Дунин А.В. и др. Математические модели и схемные решения отказоустойчивых непозиционных вычислительных систем: коллективная монография. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2016. – 216 с.

21. Molahosseini Amir Sabbagh Embedded Systems Design with Special Arithmetic and Number Systems. Springer International Publishing AG 2017 – 390 p.

22. Загуменная, Е.В., Мороз С.О. Математическая модель процесса табличной реализации операций алгебраического умножения в классе вычетов / Радиоэлектроника и компьютерные системы, 2012. – № 1. – С.68-73

23. Пехтерев С. В., Макаренко С. И., Ковальский А. А. Описательная модель системы спутниковой связи Starlink // Системы управления, связи и безопасности, 2022, №4, - с. 190-255. DOI: 10.24412/2410-9916-2022-4-190-255. URL: sccs.intelgr.com/archive/2022-04/07-Pehterev.pdf

References

1. Shreehari H.S., Supreeth Makam International Journal of Research Publication and Reviews, 2022, Vol 3, no 6, pp. 4501-4504.

2. Edward, J. Oughton A review paper on, A Techno-Economic Framework for Satellite Networks Applied to Low Earth Orbit Constellations. Assessing Starlink, OneWeb and Kuiper, IEEE Access, vol. 9, October 2021. pp 141611-141622.

3. Observations of Starlink Satellite-to-User Downlink. Software Defined Radio. Starlink Engineering. 20.09.2022. URL: reddit.com/r/StarlinkEngineering/comments/qwm1v5/observations_of_starlink_satellite_to_user/.

4. Receiving Starlink Beacons with an RTL-SDR and LNB. 20.09.2022. URL: sgcderek.github.io/blog/starlink-beacons.html.

5. Bakulin M.G., Kreyndelin V.B., Shumov A.P. Tekhnologiya OFDM. Uchebnoe posobie dlya vuzov. [OFDM technology. Textbook for universities]. Moskva, Goryachaya liniya-Telekom, 2017. 352 p.

6. Vamsidhar A. International Journal of Modern Trends in Engineering and Research (IJMTER), Volume 03, Issue 02, 2016. pp. 204-210.

7. Yücel G., Altun A.A. Journal of New Results in Science, 2016, №12. Pp. 272-287.

8. Shoberg A.G. Sovremennye metody obrabotki izobrazheniy: modifitsirovannoe veyvlet-preobrazovanie. [Modern Image Processing Methods: Modified Wavelet Transform]. Khabarovsk: Izd-vo Tikhookeanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2014. 125 pp.

9. Gonsales R., Vuds R. Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy. [Digital Image Processing]. Izdan. 3-e i dopol. Moskva: Tekhnosfera, 2012. 427 p.

10. Grinsted A., Moore J.C., Jevrejeva S. Nonlin. Processes Geophys., 2014, 11. pp. 561-566.

11. Stark Hans-Georg Wavelets and signal processing. Springer International Publishing Switzerland, 2005. 254 p.

12. Stark Hans-Georg Wavelets and signal processing. Springer International Publishing Switzerland, 2019. 254 p.

13. Malla S. Veyvlety v obrabotke signalov. [Wavelets in Signal Processing]. Moskva: Goryachaya liniya. Telekom, 2015. 671 p.

14. Enggar Fransiska. DW Design and Performance Investigation of Discrete Wavelet Transform (DWT) Based OFDM Using 4-PAM for Indoor VLC System. 7th International Conference on Information and Communication Technology (ICoICT), 2019. DOI: 10.1109/ICoICT.2019.8835217

15. Shtark G.G. Primenenie veyvletov dlya TsOS. [Using wavelets for DSP]. Moskva: Tekhnosfera, 2007. 192 p.

16. Voskoboynikov Yu. E. Veyvlet-fil'tratsii signalov i izobrazheniy (s primerami v pakete MathCAD). [Wavelet filtering of signals and images (with examples in MathCAD)]. Novosib. gos. arkhitektur.-stroit. un-t (Sibstrin). Novosibirsk : NGASU (Sibstrin), 2015. 188 p.

17. A. Omondi, B. Premkumar. Residue Number Systems: Theory and Implementation. Imperial College Press, UK, 2007. 293 p.

18. A. Mohan. Residue Number Systems. Theory and Applications. Springer International Publishing Switzerland, 2016. 351 p.

19. Chervyakov N.I., Kolyada A.A., Lyakhov P.A. Modulyarnaya arifmetika i ee prilozheniya v infokommunikatsionnykh tekhnologiyakh. [Modular arithmetic and its applications in infocommunication technologies]. Moskva: FIZMATLIT, 2017. 400 p.

20. Kalmykov I.A., Emarlukova Ya.V., Gish T.A., Dunin A.V. and others. Matematicheskie modeli i skhemnye resheniya otkazoustoychivykh nepozitsionnykh vychislitel'nykh sistem: kollektivnaya monografiya. [Mathematical models and schematic solutions for fault-tolerant non-positional computing systems: a collective monograph]. Stavropol': Izd-vo SKFU, 2016. 216 p.

21. Amir Sabbagh Molahosseini. Embedded Systems Design with Special Arithmetic and Number Systems. Springer International Publishing AG 2017. 390 p.

22. Zagumennaya, E.V., Moroz S.O. Radioelektronika i komp'yuternye sistemy, 2012, № 1. pp. 68-73.

23. Pekhterev S. V., Makarenko S. I., Koval'skiy A. A. Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti, 2022, №4. pp. 190-255. DOI: 10.24412/2410-9916-2022-4-190-255. URL: sccs.intelgr.com/archive/2022-04/07-Pehterev.pdf.