Инженерный вестник Дона, №12 (2022)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2022/8055

Моделирование колебания мембраны в форме ромба

Н.А. Чернышов, А.С. Лобакин, А.А. Постнов

ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

Аннотация: В данной работе рассмотрено моделирование колебаний мембраны в форме ромба. Найдены некоторые частные решения задачи о свободных колебаниях мембраны с различными начальными условиями и получены собственные частоты свободных колебаний. Полученное решение возможно использовать при усилении элементов конструкций летательных аппаратов ячеистой ромбовидной структурой, а также при проектировании беспилотных дронов типа летающее крыло.

Ключевые слова: Свободные колебания мембраны, мембрана в форме ромба, собственные частоты колебаний.

Введение

В современной промышленности часто применяют конструкции, содержащие мембраны различной формы. В авиастроении корпус военных и гражданских самолетов усиливается заполнителями различной формы для увеличения прочности несущих конструкций и улучшения шумоизоляции. Известны некоторые аналитические решения о свободных колебаниях мембран прямоугольной, треугольной [1], шестиугольной [2] и круглой формы. Целью представленной работы является моделирование свободных колебаний мембраны в форме ромба при заданных начальных условиях. В [3,4] найдены собственные частоты и формы прямоугольной мембраны методом разделения переменных. Методом Рэлея-Ритца решена задача о колебаниях треугольной пластины с учетом действия осевых сил [5]. Для треугольной пластины, имеющей сложные опорные условия, применялся метод множителей Лагранжа в [6]. В работах [7,8] рассмотрена треугольная пластина при различных нагрузках. Случай круговой пластины, шарнирно закреплённой и упруго подвешенной на винклеровом основании, рассмотрен в [9].

Постановка задачи

Пусть мембрана в форме ромба закреплена на границе и имеет заданную начальную форму. Затем она выводится из равновесия и начинает совершать поперечные свободные колебания перпендикулярно плоскости XOY. Такие колебания мембраны можно описать дифференциальным уравнением [10]:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

где W – отклонение точек мембраны от плоскости XOY, t – время.

На границе мембрана закреплена:

$$\mathrm{W}\big|_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

В качестве начальных условий примем следующие:

$$\mathrm{W}\big|_{t=0} = f(x, y), \quad \left.\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{3}$$

Решение представим в виде:

$$\mathrm{W} = \mathrm{U}(x, y)\mathrm{T}(t). \tag{4}$$

После подстановки (4) в (1) получим дифференциальные уравнения:

$$\mathrm{T}'' + a^2\lambda^2\mathrm{T} = 0 \tag{5}$$

$$\Delta\mathrm{U} + \lambda^2\mathrm{U} = 0 \tag{6}$$

Решение (5) не представляет сложности, запишем его

$$\mathrm{T} = A\cos a\lambda t + B\sin a\lambda t$$

Решение задачи

Сделаем замену переменных (рис. 1):

$$\xi_1 = y, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x - y\right), \ l \ \text{– высота ромба} \tag{7}$$

Переменные имеют следующие свойства:

1. Граничные условия принимают удобную форму:

$$\xi_1 = 0,\quad \xi_2 = 0,\quad \xi_1 = l,\quad \xi_2 = l \tag{8}$$

2. Возможна дифференциальная замена:

$$\Delta F(\xi_i) = \frac{d^2 F(\xi_i)}{d\xi_i^2} \tag{9}$$

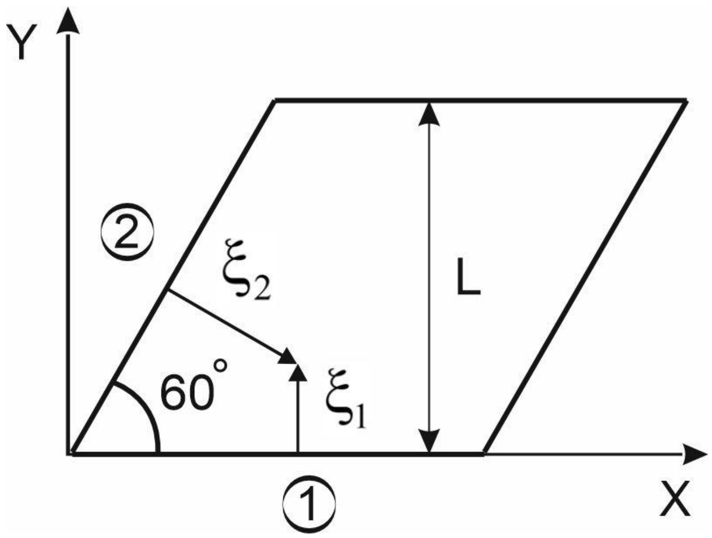

Рис. 1. – Геометрический смысл переменных ξ_1, ξ_2.

Решение (6) запишем в виде:

$$U = C\left(\sin\lambda\xi_1 + \sin\lambda\xi_2 - \sin\lambda\left(\xi_1 + \xi_2\right)\right), \tag{10}$$

Нетрудно доказать, что (10) удовлетворяет дифференциальному уравнению (6). Проверим выполнение граничных условий:

Пусть $\xi_1 = 0$. Тогда:

$$U\big|_{\xi_1=0} = C\left(\sin 0 + \sin\lambda\xi_2 - \sin\lambda\left(0 + \xi_2\right)\right) = C\left(\sin\lambda\xi_2 - \sin\lambda\xi_2\right) = 0.$$

При $\xi_2 = 0$ получим:

$$U\big|_{\xi_2=0} = C\left(\sin\xi_1 + \sin 0 - \sin\lambda\left(\xi_1 + 0\right)\right) = C\left(\sin\lambda\xi_1 - \sin\lambda\xi_1\right) = 0.$$

Возьмем $\xi_1 = l$

$$U\big|_{\xi_1=l} = C\left(\sin\lambda l + \sin\lambda\xi_2 - \sin\lambda\left(l + \xi_2\right)\right) = C(\sin\lambda l + \sin\lambda\xi_2 - \sin\lambda l\cos\lambda\xi_2 -$$
$$- \cos\lambda l\sin\lambda\xi_2) = C\left(\sin\lambda l\left(1 - \cos\lambda\xi_2\right) + \sin\lambda\xi_2\left(1 - \cos\lambda l\right)\right) = 0 .$$

Выполнение граничного условия возможно только при $\sin\lambda l = 0$ и

$1-\cos\lambda l=0$. Отсюда получаем собственные частоты колебаний мембраны

$$\lambda_n=\frac{2\pi n}{l},\ n=1,2,3... \tag{11}$$

Так как начальные скорости (3) отсутствуют, то $B=0$. Примем $b_n=AC$. Запишем все частные решения уравнения (1):

$$\mathrm{W}_n=b_n\cos\frac{2\pi n}{l}at\left(\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_1+\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_2-\sin\frac{2\pi n}{l}(\xi_1+\xi_2)\right) \tag{12}$$

Просуммировав все частные решения, найдем общее решение:

$$\mathrm{W}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos\frac{2\pi n}{l}at\left(\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_1+\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_2-\sin\frac{2\pi n}{l}(\xi_1+\xi_2)\right) \tag{13}$$

Рассмотрим частный случай начальной формы:

$$f(x,y)=\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_1+\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_2-\sin\frac{2\pi n}{l}(\xi_1+\xi_2)$$

Учитывая (3), получим уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_1+\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_2-\sin\frac{2\pi n}{l}(\xi_1+\xi_2)\right)=$$
$$=\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_1+\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_2-\sin\frac{2\pi n}{l}(\xi_1+\xi_2) \tag{14}$$

Отсюда $b_n=1$. Выбирая $n=1,2,3,...$ получим различные начальные формы, соответствующие собственным частотам. На рис. 2 показана первая собственная форма колебаний мембраны при $n=1$.

Общее решение при $n=1$.

$$\mathrm{W}=\cos\frac{2\pi}{l}at\left(\sin\frac{2\pi}{l}\xi_1+\sin\frac{2\pi}{l}\xi_2-\sin\frac{2\pi}{l}(\xi_1+\xi_2)\right) \tag{15}$$

Общее решение для произвольного n имеет вид:

$$\mathrm{W}=\cos\frac{2\pi n}{l}at\left(\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_1+\sin\frac{2\pi n}{l}\xi_2-\sin\frac{2\pi n}{l}(\xi_1+\xi_2)\right) \tag{16}$$

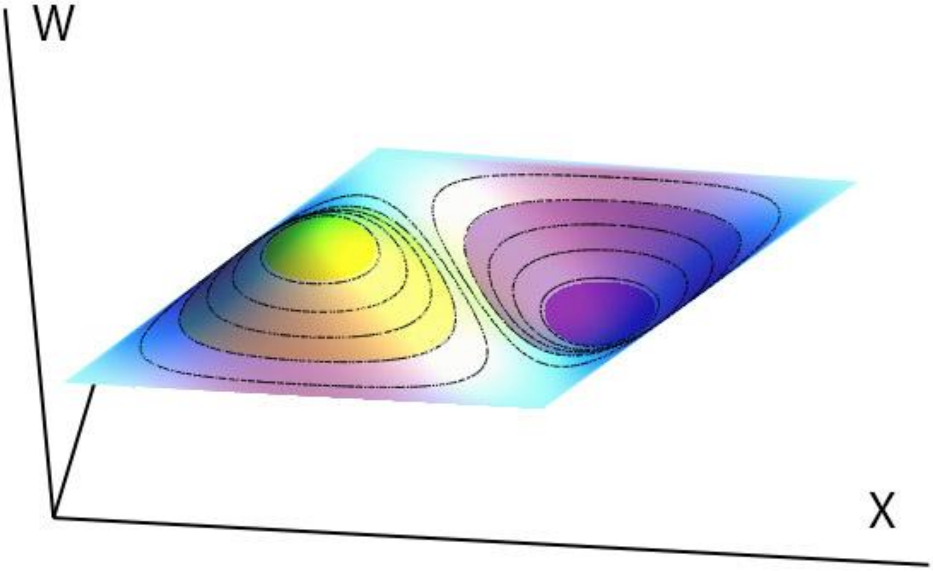

Рис. 2. – Первая начальная форма мембраны.

На рис. 3 показана вторая форма колебаний мембраны при $n = 2$.

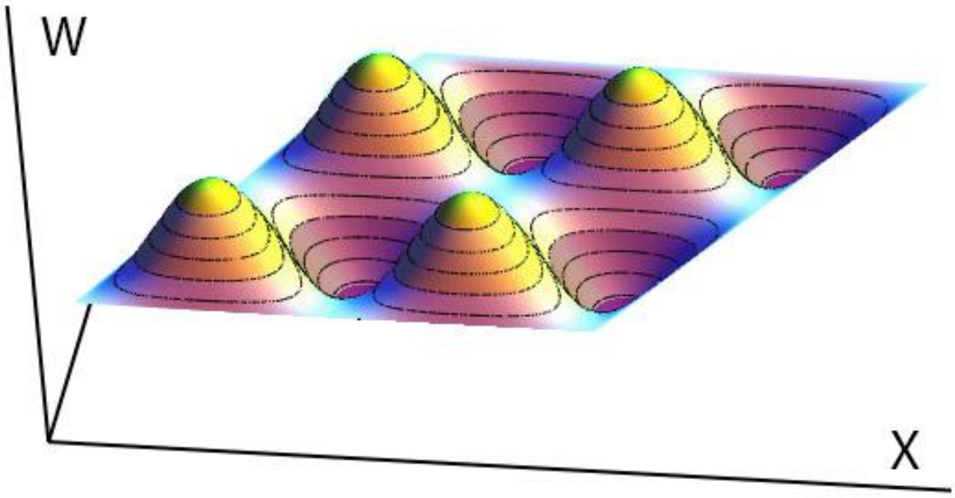

Рис. 3. – Вторая начальная форма мембраны.

Анализируя рисунки 2,3, можно заметить, что собственные формы имеют такие же зоны пучностей и узловые линии, которые наблюдаются и для известных решений свободных колебаний мембран прямоугольной, треугольной и шестиугольной форм.

В представленной работе получены некоторые частные решения задачи о свободных колебаниях мембраны в форме ромба с заданным начальным отклонением. Получены собственные частоты и найдены первые две собственные формы. Полученный результат может быть использован при проектировании различных элементов конструкций летательных аппаратов. Некоторые элементы самолета, такие как крыло, корпус и т.д., могут усиливаться ячеистой структурой ромбовидной формы. Зная модель поведения элементарной ячейки, можно прогнозировать поведение конструкции в целом и тем самым улучшить аэродинамические характеристики летательного аппарата.

Литература

1. Чернышов Н.А. Моделирование колебания мембраны треугольной формы. // Инженерный вестник Дона, 2020, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2020/6336.
2. Чернышов Н.А., Голомидов Н.А., Маслиев А.И. Моделирование колебания мембраны шестиугольной формы. // Инженерный вестник Дона, 2022, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2022/7442.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение 1985. 472 с.
4. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 444 с.
5. Laura P.A.A., Gutierrez R.H. A note on vibrating triangular equilateral plates subject to a hydrostatic state of in-plane stress // Journal of sound and vibration. 1991. №149. pp. 513-515.
6. Liew K.M. On the use of pb-2 Rayleigh-Ritz method for free flexural vibration of triangular plates with curved internal supports // Journal of sound and vibration. 1993. №165. pp. 329-340.
7. Mirza S., Bijlani M. Vibration of triangular plates // AIAA journal. 1983. №21. pp. 1472-1475.
8. Чернышов А.Д., Чернышов Н.А. Колебания треугольной упругой пластины под совместным действием равномерно распределенной поперечной нагрузки и равномерного растяжения // Известия инженерно

технологической академии чувашской республики. 1998. №11. С. 87-95.
9. Агаларов Дж.Г., Мамедова Г.А. Колебания пластины, шарнирно закреплённой и упруго подвешенной на винклеровом основании // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований, 2018, № 7. URL: applied-research.ru/ru/article/view? id=12328.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

References

1. Chernyshov N.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2020, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2020/6336.
2. Chernyshov N.A., Golomidov N.A., Masliev A.I. Inzhenernyj vestnik Dona, 2022, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/ N2y2022/7442.
3. Timoshenko S.P. Kolebaniya v inzhenernom dele [Vibrations in engineering]. M.: Mashinostroenie 1985. 472 p.
4. Sobolev S.L. Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1966. 444 p.
5. Laura P.A.A., Gutierrez R.H. Journal of sound and vibration. 1991. №149. pp. 513-515.
6. Liew K.M. Journal of sound and vibration. 1993. №165. pp. 329-340.
7. Mirza S., Bijlani M. AIAA journal. 1983. №21. pp. 1472-1475.
8. Chernyshov A.D., Chernyshov N.A. Izvestija inzhenerno tehnologicheskoj akademii chuvashskoj respubliki, 1998, №11, pp. 87-95.
9. Agalarov J.G., Mamedova G.A. International Journal of Applied and Fundamental Research, 2018, №7 URL: applied-research.ru/ru/article/view?id=12328.
10. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1977. 736 p.