

## Анализ методов для определения параметров амплитудно-частотной характеристики балки

*Н.В. Дмитриев, Д.А. Козлов*

*Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург*

**Аннотация:** В статье рассмотрены методы для определения частоты собственных колебаний и коэффициента динамичности консольно закреплённой стальной балки. В качестве методов использовался аналитический, метод конечных элементов в программной среде ANSYS и экспериментальный на вибростенде при двух способах нагружения: синусоидальной вибрацией методом качающейся частоты и широкополосной случайной вибрацией. Полученные значения частот собственных колебаний согласуются в рамках относительной погрешности 15%, значения коэффициентов динамичности – в рамках относительной погрешности 5%. Метод конечных элементов хорошо согласуется с аналитическим, притом требует выполнения меньшего количества операций для более сложных конструкций. Отличия в результатах экспериментов вытекают из различий методов нагружения объекта исследования.

**Ключевые слова:** амплитудно-частотная характеристика, метод конечных элементов, ANSYS, частота собственных колебаний, метод качающейся частоты, широкополосная случайная вибрация.

### Введение

В ходе эксплуатации механические системы совершают колебания относительно положения равновесия, причём их амплитуда зависит как от частоты, так и от массы, формы, конструкции и механических свойств системы. Одними из параметров амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) механических систем является частота их собственных колебаний и динамичность на воздействие вынужденных колебаний (коэффициент динамичности).

Определение значений этих частот и форм собственных колебаний механических систем необходимо для следующего [1, 2]:

– поскольку при их эксплуатации частота вынужденных колебаний может совпадать с частотой собственных колебаний и, соответственно, возможен резонанс конструкции, что может привести к ее разрушению;

– для виброн нагружения механической системы необходимо определить ее динамичность перед воздействием вибрации.

---

Хотя существует значительное число исследований над сложными конструкциями, актуальным также является анализ более простых механических систем, например, железобетонных балок [3] или опор ЛЭП [4].

### Материалы и методы

В качестве объекта исследования (ОИ) была взята стальная балка прямоугольного сечения, механические свойства которой приведены в таблице 1, закреплённая консольно.

Таблица № 1

Механические характеристики объекта исследования

Характеристика	Значение
Материал	сталь 12Х18Н10Т
Длина, $l$ , м	0,317
Ширина, $b$ , м	0,050
Высота, $h$ , м	0,0075
Масса, $m$ , кг	0,915
Плотность, $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7700
Модуль Юнга, $E$ , ГПа	210

Для исследования балки были выбраны три метода: аналитический, метод конечных элементов (МКЭ) и экспериментальный на вибростенде.

**Аналитический метод** расчёта частот собственных колебаний основан на формуле [5, 6]:

$$P_K = \frac{\alpha_K^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\mu}},$$

где  $\alpha_K$  – коэффициент формы колебания,  $J_x$  – момент инерции поперечного сечения балки,  $\mu$  – масса балки на единицу длины.

Момент инерции определяется по формуле:

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = 1,75 \cdot 10^9 \text{ м}^4.$$

Результаты аналитического расчёта для первых четырёх форм колебаний ( $\alpha_1 = 1,88$ ,  $\alpha_2 = 4,69$ ,  $\alpha_3 = 7,85$ ,  $\alpha_4 = 11,0$ ) представлены в таблице 2.

**Метод конечных элементов** – численный метод определения напряжений и деформаций в элементах конструкции разнообразной формы, в основе которого лежит разбиение исследуемой области на небольшие конечные элементы.

Одним из популярных средств реализации МКЭ является программная среда ANSYS [7, 8]. Для выполнения конечно-элементного анализа использовалась форма элементов SOLID размера 3,75 мм. К узлам, расположенным на торце балки, были приложены граничные условия, запрещающие перемещение и вращение по всем трем осям. Для получения первых четырех частот поперечных форм колебаний балки к ее боковым поверхностям были приложены пространственные условия, запрещающие перемещение вдоль оси X.

После построения конечно-элементной модели был произведён расчёт по определению параметров первых четырёх поперечных форм колебания балки. Результаты представлены в таблице 2, формы колебаний представлены на рис. 1.

**Вибродиагностика** является одним из основных экспериментальных способов анализа АЧХ механических систем [9, 10]. Его ограничением является необходимость использования большого числа датчиков и специализированного оборудования, согласующегося с информационными выходами вибростенда.

При проведении эксперимента балка закреплялась на столе вибростенда А30/SA3НАМ при помощи подставки и двух прихватов. На ней устанавливались 3 датчика, измеряющих ускорение AP1077M-01 через текстолитовые прокладки толщиной 6 мм в определённых местах (рис. 2) и маркировкой: Б1У, 2У, 3У.

---

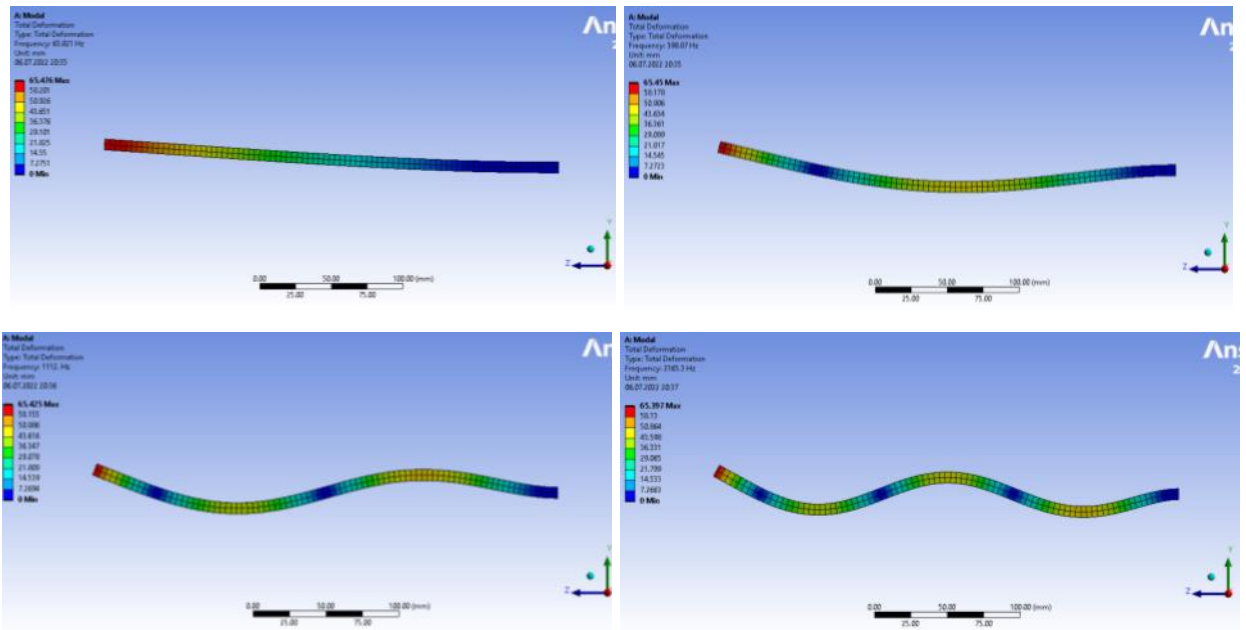


Рис. 1. – Первые четыре формы колебаний (слева-направо, сверху-вниз) балки при частотах, определённых МКЭ

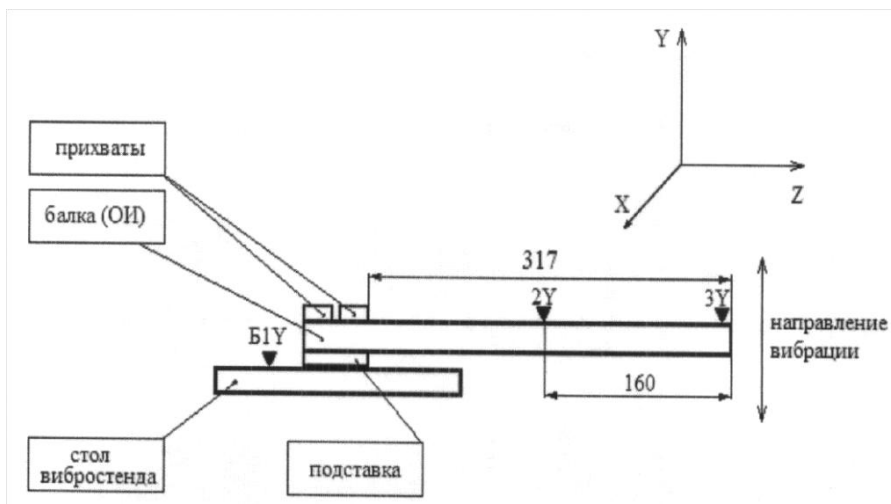


Рис. 2. – Закрепление балки на вибростенде

В первом эксперименте использовался метод качания частоты (МКЧ). При нём ОИ подвергают нагружению синусоидальной вибрацией с автоматическим изменением частоты  $f$  и поддержанием постоянного уровня пикового значения виброускорения в контрольной точке. Частота

виброускорения изменяется в диапазоне частот от нижней границы  $f_H = 10 \text{Гц}$  до верхней  $f_B = 2300 \text{Гц}$  по закону:

$$f(t) = f_H * 2^{Vt},$$

где  $V$  – скорость изменения режимов, окт./мин.,  $t$  – текущее время нагрузки.

В процессе нагружения с помощью контроллера регистрируется уровень пикового значения виброускорения на ОИ в контрольной точке  $A_k(f)$  расположенной в месте закрепления ОИ (датчик Б1У) и пиковых значений виброускорения ОИ в измерительных точках  $A_u(f)$  (датчики 2У, 3У).

По формуле определяются АЧХ:

$$A(f) = \frac{A_u(f)}{A_k(f)}.$$

Используемая аппаратура позволяет осуществлять автоматическое поддержание в контрольной точке и регистрацию в измерительных точках по пиковым значениям виброускорения значения параметров, определяемых по графикам. Уточнение полученных результатов проводится при нагружении ОИ синусоидальной вибрацией на фиксированных частотах.

На основании полученных АЧХ определяются резонансные частоты и соответствующие им коэффициенты динамичности  $K_d$  (отношение амплитуды динамического смещения к статическому смещению).

Во втором эксперименте использовался метод широкополосной случайной вибрации (ШСВ), выполняемый согласно стандарту МЭК 68-2-36-73. При нём в контрольной точке воспроизводилась вибрация с формированием равномерного спектра (спектральной плотности ускорения).

В процессе нагрузки в контрольной и измерительной точке регистрируются процессы виброускорения. На основании полученных данных проводят расчет и построение реакции в виде спектральных плотностей ускорения. Так как ОИ достаточно простой, то его можно считать

---

идеальной механической системой с постоянными параметрами, поэтому расчет АЧХ проводится по формуле:

$$A(f) = \sqrt{\frac{G_u(f)}{G_k(f)}},$$

где  $G_k(f)$  – задаваемый спектр в контрольной точке (на входе),  $G_u(f)$  – реализуемый спектр в измерительной точке (на выходе).

АЧХ балки по методу качающейся частоты представлен на рис. 3, коэффициент динамичности по методу ШСВ – на рис. 4.

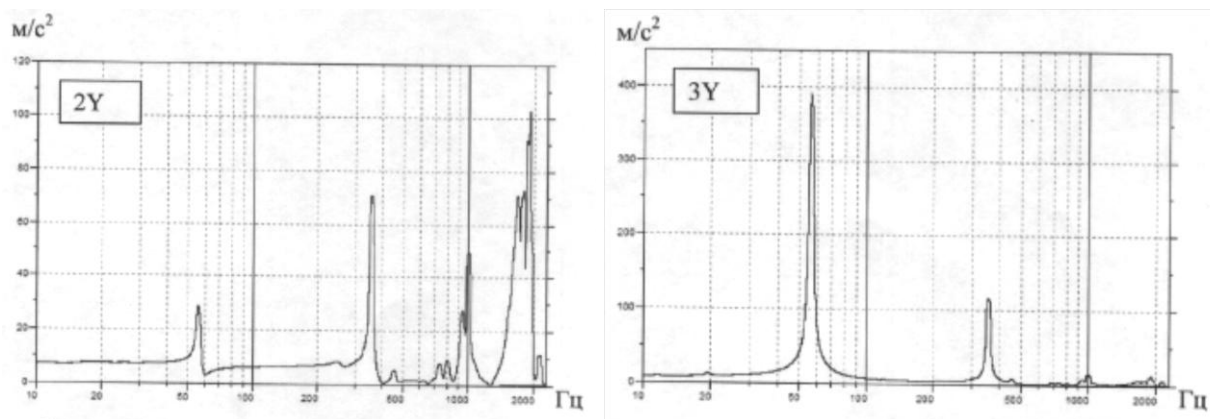


Рис. 3. – АЧХ балки в измерительных 2У и 3У по методу качающейся частоты

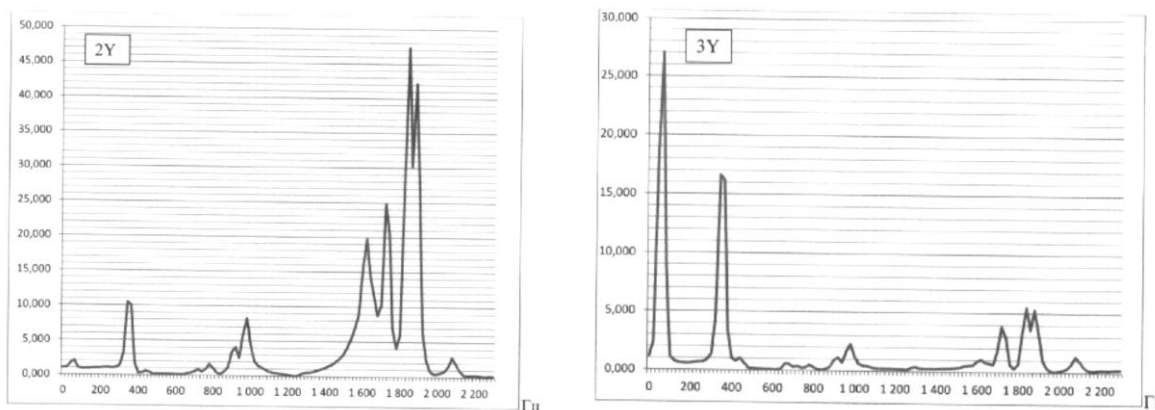


Рис. 4. – Коэффициенты динамичности в точках 2У и 3У, полученные по методу широкополосной случайной вибрации

Совокупно результаты всех трёх методов представлены в таблице 2. Результаты теоретических расчетов получились примерно одинаковыми. Отличие экспериментальных значений частот собственных колебаний составляет не более 15%.

Аналитические расчеты проведены без ошибок, численные расчеты в МКЭ проведены с точным определением свойств материала и заданием необходимых граничных условий. Эксперименты проведены с достаточной точностью к поставленной задаче и подтвердили значения, полученные расчетным путем.

Таблица № 2

Значения частот собственных колебаний ОИ

Номер собственной частоты	Расчёт		Эксперимент	
	аналитически	МКЭ	МКЧ	ШСВ
1	63	63	63	60
2	394	398	360	340
3	1104	1112	1000	980
4	2167	2165	1950	1860

Коэффициенты динамичности показаны в таблице 3. Можно заметить, что динамичность в 3У на первых двух частотах выше, чем в 2У, при увеличении частоты, наоборот, динамичность в точке 2У больше, чем в 3У. Это объясняется конструктивными особенностями механической системы на электродинамическом вибростенде.

При задании одного и того же импульса (перемещения катушки вибростенда) возникает упругий поперечный изгиб балки, при котором перемещение в точке 2У значительно меньше, чем в точке 3У. На малом промежутке времени перемещения в разных точках балки отличаются, поэтому ускорения и, соответственно, коэффициенты динамичности в этих точках тоже отличаются.

Таблица № 3

Значение коэффициентов динамичности в точках 2У и 3У

Номер собственной частоты	МКЧ		ШСВ	
	2У	3У	2У	3У
1	4	55	2	27
2	10	17	11	16,7
3	6,9	3,7	8,5	2,3
4	13,3	3,5	47,5	5,3

### Выводы

Использование метода конечных элементов можно использовать в качестве альтернативы аналитическому методу, особенно при сложной конструкции исследуемой механической системы.

Различие значений резонансных частот и коэффициентов динамичности, полученных при синусоидальном и ШСВ, отличаются ввиду различия методов нагружения ОИ.

Относительная ошибка в экспериментальном определении параметров амплитудно-частотной характеристики балки находится в рамках допустимой погрешности по ГОСТ МЭК 60068-3-8-2015.

### Литература

1. Wang S., Long X., Luo H., Zhu H. Damage identification for underground structure based on frequency response function // Sensors, 2018, V. 18. 20 p.
2. Birman V., Byrd L.W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures //Appl. Mech. Rev., 2007, Vol. 60. pp. 195-216.
3. Акатьев В.А., Нигметов Г.М., Нигметов Т.Г. Влияние степени армирования железобетонной балки на ее амплитудно-частотную характеристику // Современные наукоемкие технологии, 2015, № 3. С. 10-14.
4. Боровьев Е.В., Рущинский В.Н., Шлишевский А.В., Комар С.С., Орлов А.И., Тукачев И.Г. Результаты экспериментальных исследований



резонансной реакции железобетонных приставок деревянных опор ЛЭП // Энергоэксперт, 2020, № 4. С. 34-38.

5. Zinkovskii A., Tokar' I.G. Boundary Effect on Forming the Natural Frequency Spectrum of Flexural Vibrations of Beams with Local Surface Defects // Strength of Materials, 2020, № 53. С. 709-716.

6. Лапина А.П., Чепурненко А.С., Турко М.С. Приближенная методика расчета балок с гофрированной стенкой // Инженерный вестник Дона, 2018, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5384.

7. Toke L.K., Patil M.M. Vibration analysis and control of cracked beam using finite element method by using ANSYS. World Journal of Engineering, 2022. URL: emerald.com/insight/content/doi/10.1108/WJE-03-2021-0168/full/html.

8. Трифунович И.З., Рыбакова Л.Ю. Анализ Z-образных балок из холоднокатаной стали методом конечных элементов // Инженерный вестник Дона, 2021, № 7. URL: ivdon.ru/ru/magazine/ archive/n7y2021/7094.

9. Паутова Т.А. Анализ методов вибродиагностики металлических конструкций // Известия вузов. Машиностроение, 2021, №10. С. 16-23.

10. Badri M., Junianto F.D. Vibration Measurement Method using 3 Accelerometer CMCP770A on Beam Cylinder with Fix-Fix Support and Double Selenoid // Journal of Ocean, Mechanical and Aerospace-science and engineering, 2018, V. 56(1). pp. 5-10.

### References

1. Wang S., Long X., Luo H., Zhu H. Sensors, 2018, V. 18. 20 p.
2. Birman V., Byrd L.W. Appl. Mech. Rev., 2007, Vol. 60. pp. 195-216.
3. Akat'ev V.A., Nigmatov G.M., Nigmatov T.G. Sovremennye naukoemkie tehnologii, 2015, № 3. pp. 10-14.
4. Borov'ev E.V., Rushhinskij V.N., Shlishevskij A.V., Komar S.S., Orlov A.I., Tukachev I.G. Jenergojeksper, 2020, № 4. pp. 34-38.
5. Zinkovskii A., Tokar' I.G. Strength of Materials, 2020, № 53. С. 709-716.



6. Lapina A.P., Chepurnenko A.S., Turko M.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, № 4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5384](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5384).

7. Toke L.K., Patil M.M. World Journal of Engineering, 2022. URL: [emerald.com/insight/content/doi/10.1108/WJE-03-2021-0168/full/html](http://emerald.com/insight/content/doi/10.1108/WJE-03-2021-0168/full/html).

8. Trifunovich I.Z., Rybakova L.Y. Inzhenernyj vestnik Dona, 2021, № 7. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n7y2021/7094](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n7y2021/7094).

9. Pautova T.A. Izvestija vuzov. Mashinostroenie, 2021, №10. pp. 16-23.

10. Badri M., Junianto F.D. Journal of Ocean, Mechanical and Aerospace-science and engineering, 2018, V. 56. pp. 5-10.