Инженерный вестник Дона, №2 (2016)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3634

Математическое моделирование и компьютерная графика кинематических линейчатых поверхностей на основе внутреннего обкатывания в парах контактирующих цилиндров и конусов

Г.С. Рачковская

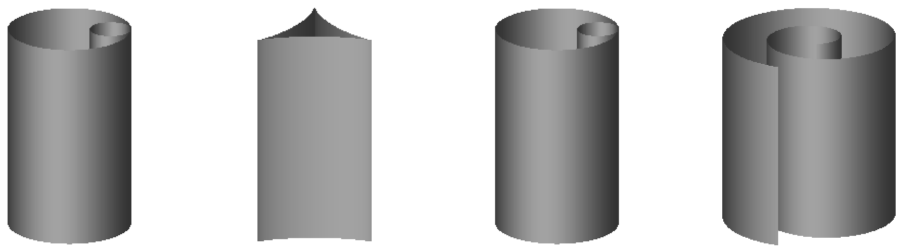
Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону

Аннотация: На основе геометрической модели внутреннего обкатывания одного аксоида другим для пар круговых цилиндров и круговых конусов разработано аналитическое описание генерируемых кинематических линейчатых поверхностей. Рассмотрены два варианта взаимного расположения подвижного и неподвижного аксоидов. В первом варианте подвижный аксоид расположен внутри неподвижного и при этом внешняя поверхность подвижного аксоида обкатывает внутреннюю поверхность неподвижного. Во втором варианте, наоборот, неподвижный аксоид расположен внутри подвижного и, соответственно, внешняя поверхность неподвижного аксоида обкатывается внутренней поверхностью подвижного. В результате, одна из прямолинейных образующих подвижного аксоида генерирует новую кинематическую линейчатую поверхность. С помощью ранее разработанного приложения “ArtMathGraph” выполнена компьютерная графика кинематических линейчатых поверхностей, построенных для двух вариантов геометрической модели внутреннего обкатывания одного аксоида другим.

Ключевые слова: математическое моделирование, аналитическая геометрия, кинематическая линейчатая поверхность, компьютерная графика.

Достижения математического моделирования аналитических поверхностей систематизированы в “Энциклопедии аналитических поверхностей” [1], включившей в себя класс технологически востребованных линейчатых поверхностей [1-3]. Разработка новых геометрических моделей построения оригинальных аналитических поверхностей относится к одной из актуальных задач аналитической геометрии линейчатых поверхностей [1-3], включая прикладные аспекты в строительстве и архитектуре [4, 5]. Возможности моделирования новых линейчатых поверхностей существенно расширяются за счет кинематических поверхностей [6-9]. Кинематические линейчатые поверхности формируются движением выделенной прямолинейной образующей одной (подвижной) линейчатой поверхности в процессе её перемещения относительно другой (неподвижной) линейчатой поверхности при условии, что в данном процессе эти поверхности в каждый момент времени соприкасаются по единой общей для них прямолинейной образующей [7-9]. Этому условию контактирования в парах аксоидов удовлетворяет, например, геометрическая модель качения одного аксоида по другому для таких пар, как “цилиндр – цилиндр” или “конус – конус” [8]. Для этих пар геометрическая модель внешнего обкатывания одного аксоида другим, в процессе которого внешняя поверхность неподвижного аксоида обкатывается внешней поверхностью подвижного, подробно изучена [8]. Геометрическая модель внутреннего обкатывания одного аксоида другим рассмотрена в настоящей работе и включает в себя два варианта (**А** и **Б**) взаимного расположения подвижного и неподвижного аксоидов и, как следствие, два варианта генерируемых при этом кинематических линейчатых поверхностей. В варианте **А** подвижный аксоид расположен внутри неподвижного аксоида, внутренняя поверхность которого обкатывается внешней поверхностью подвижного аксоида, а в варианте **Б** неподвижный аксоид расположен внутри подвижного и внешняя поверхность неподвижного аксоида обкатывается внутренней поверхностью подвижного.

1. Пара контактирующих круговых цилиндров.



1А КП (**1А**) **1Б** КП (**1Б**)

Рис. 1. Пары контактирующих круговых цилиндров (варианты **А** и **Б**) и соответствующие кинематические поверхности (КП (**1А**) и КП (**1Б**)).

Геометрическая модель внутреннего обкатывания в паре контактирующих круговых цилиндров (рис. 1) представлена в виде суперпозиции двух согласованных между собой движений:

(1) вращательное движение подвижного цилиндра вокруг своей оси;

(2) вращательное движение оси подвижного цилиндра вокруг оси неподвижного цилиндра, совпадающей с осью *oz* неподвижной системы координат *oxyz*, связанной с неподвижным цилиндром.

В результате, движение одной из прямолинейных образующих подвижного цилиндра генерирует кинематическую линейчатую поверхность, параметрическое (в параметрах *u*, *v*) задание которой в неподвижной системе координат *oxyz* для вариантов **А** и **Б** (рис. 1) имеет следующий вид:

Вариант **А**	Вариант **Б**
$x = b\cos((1-k)u) - b(1-k)\cos u$;	$x = b\cos((1+k)u) - b(1-k)\cos u$;
$y = b\sin((1-k)u) - b(1-k)\sin u$;	$y = b\sin((1+k)u) - b(1-k)\sin u$;
$z = v$;	$z = v$,

где $k = a/b$ (a – радиус неподвижного, b – радиус подвижного цилиндров).

Кинематические поверхности (КП (**1А**) и КП (**1Б**)), построенные для двух вариантов (**А** и **Б**) внутреннего обкатывания в паре контактирующих круговых цилиндров, приведены на рисунке 1.

Изображения контактирующих аксоидов и компьютерная графика кинематических линейчатых поверхностей (рис. 1) выполнены с помощью приложения “ArtMathGraph” [10], разработанного ранее для визуализации аналитических поверхностей и моделей сложных геометрических форм [11].

2. Пара контактирующих круговых конусов.

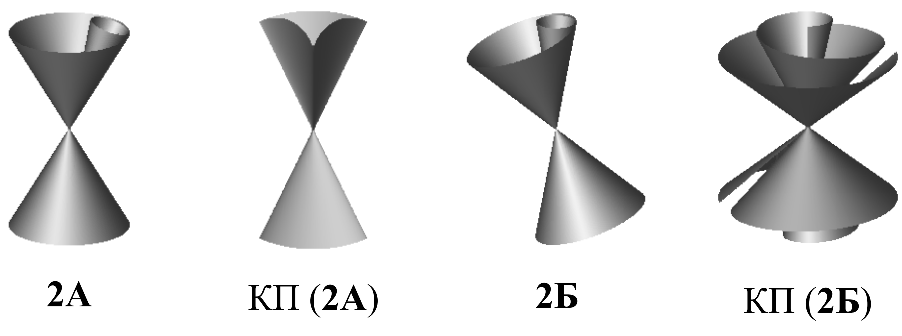


Рис. 2. Пары контактирующих круговых конусов (варианты **А** и **Б**) и соответствующие кинематические поверхности (КП (**2А**) и КП (**2Б**)). (На рисунке оси неподвижных аксоидов вертикальные.)

Геометрическая модель обкатывания одного конуса другим (рис. 2) представлена как суперпозиция двух согласованных между собой движений:
(1) вращательное движение подвижного конуса вокруг своей оси;
(2) вращательное движение оси подвижного конуса вокруг оси неподвижного конуса, совпадающей с осью *oz* неподвижной системы координат *oxyz*.

В результате, движение одной из прямолинейных образующих подвижного конуса генерирует кинематическую линейчатую поверхность, параметрическое (в параметрах *u*, *v*) задание которой в неподвижной системе координат *oxyz*, связанной с неподвижным конусом, имеет следующий вид:

$x = X\cos\theta\cos u - Z\sin\theta\cos u - Y\sin u$;

$y = X\cos\theta\sin u - Z\sin\theta\sin u + Y\cos u$;

$z = X\sin\theta + Z\cos\theta$,

где $X = v\sin\beta\cos\varphi$; $Y = v\sin\beta\sin\varphi$; $Z = v\cos\beta$.

Для варианта **А** внутреннего обкатывания (рис. 2): $\theta = \alpha - \beta$, $\varphi = -ku$,

а для варианта **Б** внутреннего обкатывания (рис. 2): $\theta = \beta - \alpha$, $\varphi = ku$,

где α и β – углы между осями и прямыми образующими для неподвижного и подвижного круговых конусов, соответственно; $k = \sin\alpha / \sin\beta$.

Кинематические поверхности (КП (**2А**) и КП (**2Б**)) для вариантов **А** и **Б** внутреннего обкатывания в паре круговых конусов приведены на рисунке 2.

Таким образом, для двух вариантов геометрической модели внутреннего обкатывания одного аксоида другим в парах контактирующих цилиндров или конусов разработано аналитическое описание и проведена компьютерная визуализация построенных кинематических поверхностей. Использование геометрической модели внутреннего обкатывания одного аксоида другим с учетом графических возможностей разработанного ранее приложения “ArtMathGraph” расширяет зону компьютерного моделирования новых технологически востребованных линейчатых поверхностей.

Литература

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Switzerland: Springer, 2015. 752 p.

2. Peternell M., Pottmann H., Ravani B. On the computational geometry of ruled surfaces // Computer-Aided Design. 1999. V. 31. pp. 17-32.

3. Odehnal B. Subdivision Algorithms for Ruled Surfaces // Journal for Geometry and Graphics. 2008. V. 12. №1. pp. 1-18.

4. Flöry S., Pottmann H. Ruled Surfaces for Rationalization and Design in Architecture // Advances in Architectural Geometry. 2010. pp. 103-109.

5. Pottmann H., Eigensatz M., Vaxman A., Wallner J. Architectural Geometry // Computers & Graphics. 2015. V. 47. pp. 145-164.

6. Sprott K., Ravani B. Kinematic generation of ruled surfaces // Advanced in Computational Mathematics. 2002. V. 17. pp. 115-133.

7. Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. Computer graphics of kinematic surfaces // Poceedings of the 12-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics. Plzen, Czech Republic. 2004. pp. 141-144.

8. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. Москва: Наука, 2006. 536 с.

9. Рачковская Г.С. Математическое моделирование кинематических поверхностей на основе однополостного гиперболоида вращения в качестве неподвижного и подвижного аксоидов // Инженерный вестник Дона, 2013, №1 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1499/.

10. Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. The new software application “ArtMathGraph” // Poceedings of the 15-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics. Plzen, Czech Republic. 2007. pp. 29-32.

11. Рачковская Г.С. Математическое моделирование и компьютерная визуализация сложных геометрических форм // Инженерный вестник Дона, 2013, №1 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1498/.

References

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Switzerland: Springer, 2015. 752 p.

2. Peternell M., Pottmann H., Ravani B. On the computational geometry of ruled surfaces. Computer-Aided Design. 1999. V. 31. pp. 17-32.

3. Odehnal B. Subdivision Algorithms for Ruled Surfaces. Journal for Geometry and Graphics. 2008. V. 12. №1. pp. 1-18.

4. Flöry S., Pottmann H. Ruled Surfaces for Rationalization and Design in Architecture. Advances in Architectural Geometry. 2010. pp. 103-109.

5. Pottmann H., Eigensatz M., Vaxman A., Wallner J. Architectural Geometry. Computers & Graphics. 2015. V. 47. pp. 145-164.

6. Sprott K., Ravani B. Kinematic generation of ruled surfaces. Advanced in Computational Mathematics. 2002. V. 17. pp. 115-133.

7. Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. Computer graphics of kinematic surfaces. Poceedings of the 12-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics. Plzen, Czech Republic. 2004. pp. 141-144.

8. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.M. Analiticheskie poverchnosti (Rus), [Analytical Surfaces]. Moscow: Nauka, 2006. 536 p.

9. Rachkovskaya G.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №1 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1499/.

10. Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. The new software application “ArtMathGraph”. Poceedings of the 15-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics. Plzen, Czech Republic. 2007. pp. 29-32.

11. Rachkovskaya G.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №1 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1498/.