Определение хроматического множества нечеткого темпорального графа

Л.С.Берштейн, С.Л.Беляков, А.В.Боженюк

Южный федеральный университет, Таганрог

Аннотация: В статье введено и рассмотрено понятие хроматического множества как инварианта нечеткого темпорального графа, т.е. такого графа, в котором степень связности вершин изменяется в дискретном времени. Хроматическое множество определяет наибольшую степень разделимости вершин темпорального нечеткого графа, при их окраске в заданное число цветов в любой момент времени. Рассмотрен пример нахождения хроматического множества нечеткого темпорального графа.
Ключевые слова: Нечеткий темпоральный граф, нечеткий суграф, окраска графа, хроматическое множество, степень разделимости.

Введение

Графовые модели привлекают большое внимание специалистов в различных областях знаний. Они используются для моделирования различных сложных объектов и явлений с некоторой выраженной структурой. Кроме того, наряду с применениями графовых моделей в таких науках, как химия, электротехника, физика, они используются и в науках, считавшиеся раньше далекими от них – в экономике, лингвистики, социологии. Графовые модели могут использоваться для задания отношений в структурах различной природы между их элементами [1-4]. В этом случае отношения между элементами (вершинами графа) считаются постоянными и не могут меняться в процессе моделирования. Такие графы в работе [5] были названы статическими. Однако, если отношения между элементами рассматриваемой структуры могут меняться во времени, традиционные графовые модели не подходят для их описания и не могут быть использованы для моделирования процессов во времени. В этом случае, является актуальным рассмотрение графовых моделей, т.е., графов в которых связи вершинами могут изменяться в дискретном (или непрерывном) времени. Такие графы были названы темпоральными [6, 7]. Когда же в темпоральном графе, связи между вершинами являются также частично неопределенными или нечеткими, то приходим к графам, которые были названы нечеткими темпоральными [8-10].

При использовании таких графов как моделей сложных систем актуальным является рассмотрение их инвариантов, т.е. таких характеристик графа, которые не меняются при его изоморфном преобразовании [11]. Для четких графов такими инвариантами являются степень внутренней и внешней устойчивости, хроматическое число, хроматический класс и др. [3]. В данной работе вводится понятие хроматического множества темпорального нечеткого графа, которое и является его инвариантом.

Понятие хроматического множества темпорального нечеткого графа

Обозначим через $\widetilde{G}=(X,\{\widetilde{\Gamma}_t\},T)$ темпоральный нечеткий граф [10,12], в котором множество X является множеством вершин графа ($|X|=n$), множество натуральных чисел $t=\{1,2,\dots,T\}$ определяет дискретное время, а множество $\{\widetilde{\Gamma}_t\}$ задает семейство соответствий, которые отображают вершины X в себя в моменты времени $t=\overline{1,T}$.

Введем в рассмотрение нечеткий суграф $\widetilde{G}_t=(X,\widetilde{U}_t)$, в котором множество вершин X – тоже, что и в исходном темпоральном нечетком графе $\widetilde{G}=(X,\{\widetilde{\Gamma}_t\},T)$, множество $\widetilde{U}_t=\{\mu_t(x_i,x_j)\,|\,(x_i,x_j)\in X^2\}$ является нечетким множеством ребер в моменты $t=\overline{1,T}$, а функция μ_t есть функция принадлежности, отображающая $X^2\to[0,1]$.

Раскрасим каждую вершину $x\in X$ нечеткого суграфа $\widetilde{G}_t=(X,\widetilde{U}_t)$, в один из k заранее заданных цветов $(1<k<n)$ и выделим подграф $\widetilde{G}_i^{(t)}=(X_i,\widetilde{U}_i^{(t)})$, в котором вершины X_i окрашены в одинаковый i-й цвет. Тогда величина $\alpha_i=1-\underset{x,y\in X_i}{\vee}\mu_G(x,y)$ согласно [13, 14] определит степень его внутренней устойчивости.

Определение 1. Степенью разделимости нечеткого суграфа $\tilde{G}_t$ при его окраске в k цветов называется величина:

$$L = \underset{i\equiv\overline{1,k}}{\&}\alpha_i = \underset{i\equiv\overline{1,k}}{\&}(1 - \underset{x,y\in X_i}{\vee}\mu_G(x,y)).$$

Степень разделимости L нечеткого суграфа $\tilde{G}_t$ зависит от числа красок k и от конкретной окраски вершин. Поставим в соответствие нечеткому суграфу $\tilde{G}_t$ семейство нечетких множеств $\Re^{(t)} = \{\tilde{A}_G^{(t)}\}$, $\tilde{A}_G^{(t)} = \{< L_A^{(t)}(k)/k >| k = \overline{1,n}\}$. Здесь величина $L_A^{(t)}(k)$ задает степень разделимости суграфа $\tilde{G}_t$ при его конкретной окраске в k цветов.

Определение 2. Нечеткое множество $\tilde{\gamma}^{(t)} = \{< L_\gamma^{(t)}(k)/k >| k = \overline{1,n}\}$ назовем хроматическим множеством суграфа $\tilde{G}_t$, если для любого другого надмножества $\tilde{A}_G^{(t)} \in \Re^{(t)}$ будет выполняться нечеткое включение $\tilde{A}_G^{(t)} \subseteq \tilde{\gamma}^{(t)}$.

Иначе говоря, $(\forall\tilde{A}_G^{(t)} \in \Re^{(t)})(\forall k = \overline{1,n})[L_A^{(t)}(k) \le L_\gamma^{(t)}(k)]$, то есть, хроматическое множество суграфа $\tilde{G}_t$ определяет наибольшие степени его разделимости при окраске его вершин в 1, 2,..., n цветов в момент времени t.

Определение 3. Множество $\tilde{\gamma} = \bigcap\limits_{t=\overline{1,T}} \gamma^{(t)} = \{<a_1/1>,<a_2/2>,...,<a_n/n>\}$ назовем хроматическим множеством темпорального нечеткого графа $\tilde{G} = (X, \{\tilde{\Gamma}_t\}, T)$.

Хроматическое множество определяет наибольшую степень разделимости вершин темпорального нечеткого графа, при их окраске в 1, 2,…,n цветов в любой момент времени $t\in T$.

Пример. Рассмотрим пример темпорального нечеткого графа $\tilde{G} = (X, \{\tilde{\Gamma}_t\}, T)$, у которого множество вершин $X=\{x_1, x_2, x_4\}$, время $T=\{1, 2, 3\}$, а многозначное отображение $\{\tilde{\Gamma}_t\}$ имеет вид:

$\widetilde{\Gamma}_1(x_1)=\{<0{,}2/x_2>\}$, $\widetilde{\Gamma}_2(x_1)=\{<0{,}5/x_2>\}$, $\widetilde{\Gamma}_2(x_2)=\{<0{,}4/x_3>\}$, $\widetilde{\Gamma}_3(x_2)=\{<0{,}6/x_3>\}$, $\widetilde{\Gamma}_1(x_3)=\{<0{,}2/x_4>\}$, $\widetilde{\Gamma}_2(x_3)=\{<0{,}3/x_4>\}$, $\widetilde{\Gamma}_1(x_4)=\{<0{,}2/x_1>\}$, $\widetilde{\Gamma}_2(x_4)=\{<0{,}9/x_2>\}$, $\widetilde{\Gamma}_3(x_4)=\{<0{,}1/x_1>,<1/x_2>\}$.

Графическое представление данного графа $\widetilde{G}$ приведено на Рис.1. Здесь на дугах указаны функции принадлежности в моменты времени t=$\{1,2,3\}$.

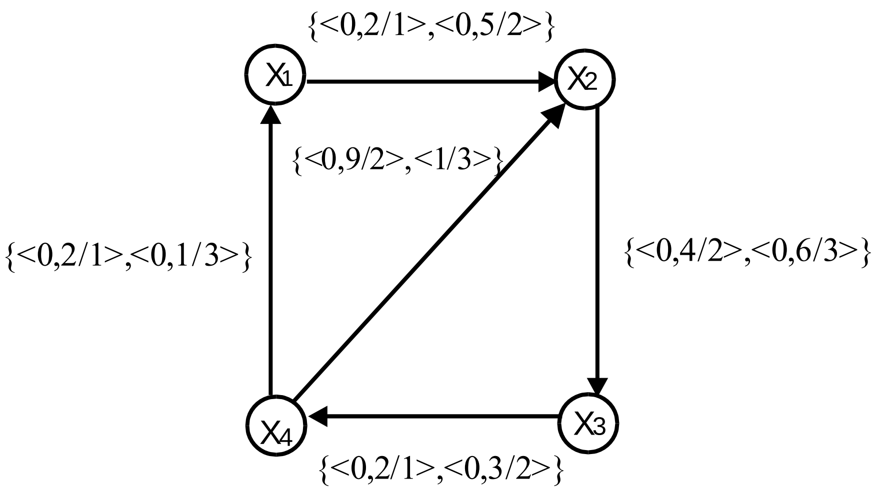

Рис.1. Нечеткий темпоральный граф $\widetilde{G}$

Темпоральный нечеткий граф можно представить как объединение T нечетких суграфов, заданных на одном и том же множестве вершин X. Так граф $\widetilde{G}$ представим в виде $\widetilde{G}=\bigcup_{t=1}^{3}\widetilde{G}_t$, где нечеткие суграфы $\widetilde{G}_1$, $\widetilde{G}_2$ и $\widetilde{G}_3$ показаны на рис.2-4.

Вычисляем хроматические множества нечетких суграфов:

- в момент t=1 - $\gamma^{(1)}=\{<0{,}8/1>,<1/2>,<1/3>,<1/4>\}$;
- в момент t=2 - $\gamma^{(2)}=\{<0{,}1/1>,<0{,}6/2>,<0{,}7/3>,<1/4>\}$;
- в момент t=3 - $\gamma^{(t)}=\{<0/1>,<1/2>,<1/3>,<1/4>\}$.

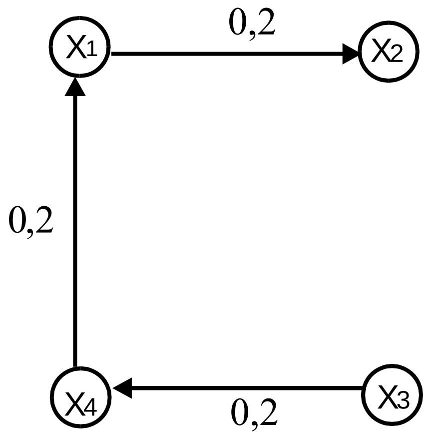

Рис.2. Сугграф $\tilde{G}_1$ в момент t=1.

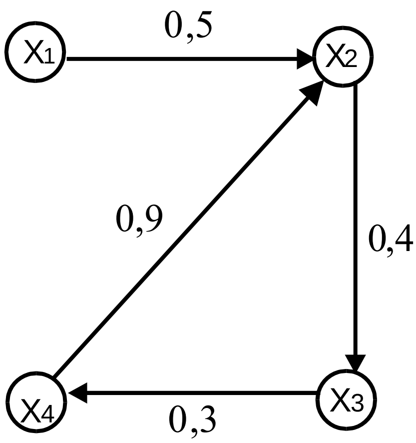

Рис.3 Сугграф $\tilde{G}_2$ в момент t=2

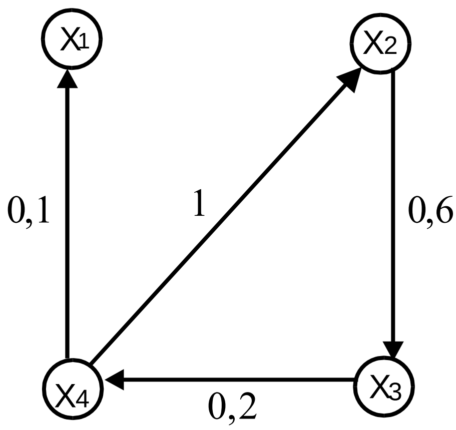

Рис.4 Сугграф $\tilde{G}_3$ в момент t=3

Отсюда хроматическое множество нечеткого темпорального графа определяется как: $\tilde{\gamma} = \{<0/1>, <0{,}6/2>, <0{,}7/3>, <1/4>\}$.

Таким образом, нечеткий темпоральный графа, представленный на рисунке 1, в любой момент времени может быть окрашен в 2 цвета со степенью разделимости не менее 0,6; в 3 цвета со степенью разделимости не менее 0,7 и в 4 цвета со степенью разделимости не менее 1.

Выводы

В данной работе мы рассмотрели понятие хроматического множества как инварианта нечеткого темпорального графа, т.е. такого графа, в котором степень связности вершин изменяется в дискретном времени. Хроматическое множество определяет наибольшую степень разделимости вершин темпорального нечеткого графа, при их окраске в заданное число цветов в любой момент времени. Рассмотрен пример нахождения хроматического множества нечеткого темпорального графа.

Статья подготовлена по результатам исследований, выполненных при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № 14-01-00032а.

Литература

1. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. - 336с.

2. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. – 326с.

3. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Теория графов: учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. – 174с.

4. Ерусалимский Я.М. Графы с затуханием на дугах и усилением в вершинах и маршрутизация в информационных сетях // Инженерный вестник Дона. 2015. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2782.

5. Kostakos V. Temporal graphs // In Proc. of Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2008. vol.388. Issue 6. Elsevier. pp. 1007-1023.

6. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Использование темпоральных графов как моделей сложных систем // Известия ЮФУ. Технические науки. Таганрог: ТТИ ЮФУ. 2010. №4 (105). С. 198-203.

7. Боженюк, А.В., Герасименко Е.М. Разработка алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети // Инженерный вестник Дона. 2013. № 1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1583.

8. Берштейн Л.С., Беляков С.Л., Боженюк А.В. Метод Магу для нахождения нечеткого множества баз нечеткого темпорального графа // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. № 1. с.70-76.

9. Берштейн Л.С., Боженюк А.В., Розенберг И.Н. Метод нахождения сильной связности нечетких темпоральных графов // Вестник РГУПС. Ростов-на-Дону: РГУПС. 2011. №3 (43). С. 15-20.

10. Берштейн Л.С., Беляков С.Л., Боженюк А.В. Использование нечетких темпоральных графов для моделирования в ГИС // Известия ЮФУ. Технические науки. Таганрог: ТТИ ЮФУ. 2012. №1 (126). С. 121-127.

11. Боженюк А.В., Гинис Л.А. Алгоритмическая поддержка исследования системных связей в социально-экономической системе на основе нечетких графовых моделей //Экономика и менеджмент систем управления, 2015, №1.1(15). С.115-122.

12. Bershtein L.S., Bozhenyuk A.V. Fuzzy Coloring for Fuzzy Graphs // Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Melbourne, Australia, December 2-5, 2001. Vol.3, pp.79-81.

13. Bershtein L.S., Bozhenuk A.V. Maghout Method for Determination of Fuzzy Independent, Dominating Vertex Sets and Fuzzy Graph Kernels // International Journal of General Systems. 2001. T. 30. № 1. pp. 45-52.

14. Bozheniuk V., Bozhenyuk A., Belyakov S. Optimum allocation of centers in fuzzy transportation networks with the largest vitality degree // Proceedings of the 2015 Conference of the International Fuzzy System Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology. Atlantis Press. 2015. pp. 1006-1011.

References

1. Ore O. Teorija grafov [Theory of graphs]. M.: Nayka, 1980. 336p.

2. Minieka, E. Algoritmy optimizacii na setjah i grafah [Optimization Algorithms for Networks and Graphs]. M: Mir, 1981. 326p.

3. Bershtein L.S., Bozhenyuk A.V. Teorija grafov: uchebnoe posobie [Graph theory]. Rostov-on-Don: UFY, 2014. 174p.

4. Erusalimskiy Ia.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2782.

5. Kostakos V. Temporal graphs. In Proc. of Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2008. vol.388. Issue 6. Elsevier. pp. 1007-1023.

6. Bershtein L.S., Bozhenyuk A.V. Izvestiya UFY. Technicheskie nayuki. Taganrog: TTI UFY. 2010. №4 (105). pp. 198-203.

7. Bozhenyuk A.V., Gerasimenko E.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013. № 1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1583.

8. Bershtein L.S., Beliakov S.L., Bozhenyuk A.V. Izvestiya UFY. Technicheskie nayuki. 2014. № 1. pp.70-76.

9. Bershtein L.S., Bozhenyuk A.V., Rozenberg I.N. Vestnik RGUPS. Rostov-on-Don: RGUPS. 2011. №3 (43). pp. 15-20.

10. Bershtein L.S., Beliakov S.L., Bozhenyuk A.V. Izvestiya UFY. Technicheskie nayuki. Taganrog: TTI UFY. 2012. №1 (126). pp. 121-127.

11. Bozhenyuk A.V., Ginis L.A. Economica i menedzhment system ypravleniya. 2015, №1.1 (15). C.115-122.

12. Bershtein L.S., Bozhenyuk A.V. Fuzzy Coloring and Evaluation of the Degree of Izomorphizm of Fuzzy Graphs. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2002. T. 41. № 3. pp. 447-453.

13. Bershtein L.S., Bozhenuk A.V. Maghout Method for Determination of Fuzzy Independent, Dominating Vertex Sets and Fuzzy Graph Kernels. International Journal of General Systems. 2001. T. 30. № 1. pp. 45-52.

14. Bozheniuk V., Bozhenyuk A., Belyakov S. Optimum allocation of centers in fuzzy transportation networks with the largest vitality degree. Proceedings of the 2015 Conference of the International Fuzzy System Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology. Atlantis Press. 2015. pp. 1006-1011.