

## Расчет пространственной фильтрации воды к горизонтальной дрене конечной длины в однородном потоке

*Б.Х. Амшоков, Т.А. Сасиков, А.А. Анахаев, И.М. Абазов, М.Р. Тарчоков*

*Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет, Нальчик*

**Аннотация:** При изучении задач фильтрации воды к одиночной горизонтальной несовершенной дрене конечной длины, в системе взаимодействующих горизонтальных несовершенных дрен, необходимо рассмотреть пространственные (трехмерные) задачи фильтрации. В отличие от плоских (двумерных) задач, пространственная фильтрация изучена менее подробно, поскольку получение строгих решений задач фильтрации затруднительно.

**Ключевые слова:** водопроводящие сооружения, фильтрация, эквипотенциали, дрена, скважина, напорный пласт, сток, напор, приток, водоем, водоток.

Для изучения фильтрации воды к одиночной горизонтальной несовершенной дрене конечной длины, а тем более к системе взаимодействующих горизонтальных несовершенных дрен конечной длины, необходимо рассмотреть пространственные (трехмерные) задачи фильтрации, которые в отличие от плоских (двумерных) изучены менее подробно, поскольку получение строгих решений пространственных задач фильтрации затруднительно.

В настоящее время имеются теоретические и экспериментальные работы, посвященные изучению фильтрации воды и нефти к горизонтальной дрене конечной длины (горизонтальной скважине). Наиболее строгие из существующих решений пространственных задач фильтрации к горизонтальной дрене конечной длины даны в работах [1–3].

Хотя эти решения получены преимущественно для более простых условий работы дрены в полуограниченном или неограниченном в плане однородном напорном пласте конечной мощности, в неограниченном по мощности пласте и т. д., все же они довольно сложны для практического использования.

Цель настоящей работы — получить решение для более общего случая работы дрены — двухстороннего несимметричного притока к дрене, а также

---

разработать более простые методы расчета пространственной фильтрации к горизонтальной дрене конечной длины.

Решение задачи находится методом суперпозиции линейных источников — стоков с постоянной по длине интенсивностью  $q$  с использованием для потенциала скорости фильтрации в неограниченном в плане пласте мощностью  $T$ , вызванного точечным источником, расположенным в точке с координатами  $(0, 0, a)$ , выражения [4].

$$\varphi = \frac{q}{2\pi T} \left[ \ln \frac{4T}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} k_0 \left( \frac{\pi n r}{T} \right) \cos \frac{\pi n z}{T} \cos \frac{\pi n a}{T} \right] + C, \quad (1)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $K_0$  — видоизмененная функция Бесселя второго рода нулевого порядка;  $C$  — произвольная постоянная.

В уравнении (1) удовлетворены граничные условия непроницаемости кровли и подошвы пласта. Потенциал  $\Phi$  для линейного стока определится в результате интегрирования выражения (1) по длине стока  $s$ .

При решении задачи приняты следующие предпосылки и допущения:

1. Водонепроницаемые границы пласта горизонтальные, контуры питания и стока вертикальные.

2. Теоретический линейный сток с постоянной по длине интенсивностью  $q$  заменяется фильтром, имеющим форму ближайшей к скважине эквипотенциали в виде эллипсоида вращения. Такой способ для горизонтальных и наклонных скважин применяли П. Я. Полубаринова-Кочина, Г. А. Разумов и др., для вертикальных скважин — Н. К. Гирицкий. Переход от этого фильтра-эквипотенциали к реальной трубчатой дрене с радиусом  $r_d$  осуществляется приравниванием или объемов эллипсоида с малой полуосью  $b$  и цилиндра равной длины ( $b=1,215r_d$ ), или площадей их поверхностей ( $b=1,415r_d$ ). При более точном исключении теоретического линейного стока с постоянной по длине интенсивностью, которая достигается путем осреднения потенциала (напора) по длине дрены,  $b=1,356 r_d$  [5]. Последним выражением

рекомендуется пользоваться в расчетах.

3. Величина  $b$  пренебрежимо мала по сравнению с другими линейными размерами.

Для общего случая — схемы двустороннего несимметричного притока к горизонтальной несовершенной трубчатой дрене (рис. 1) — решение задачи будет иметь вид:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{2\pi T} \left[ \ln 4T + \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (\ln r_1 - \ln r_2) d\eta + 2 \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{\pi n z}{T} \cos \frac{\pi n a}{T} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \left[ K_0 \left( \frac{\pi n r_2}{T} \right) - K_0 \left( \frac{\pi n r_1}{T} \right) \right] d\eta \right] + C_1 x + C_2 \quad (2)$$

Здесь при параллельном расположении дрены относительно контуров питания и стока:

$$r_1 = \sqrt{(2Lr - l_2 - x)^2 + (\eta - y)^2} \\ r_2 = \sqrt{(2Lr + l_2 - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

при расположении дрены параллельно контурам питания и стока:

$$r_1 = \sqrt{[2Lr - l_2 - (x - \eta)]^2 + y^2}, \\ r_2 = \sqrt{[2Lr + l_2 - (x - \eta)]^2 + y^2}, \\ -\frac{s}{2} \leq \eta \leq \frac{s}{2}$$

где  $\eta$  — текущая координата на линейном стоке. Обозначения остальных величин ясны из предыдущего изложения и рис.1.

Выполняя граничные условия на контуре питания и стока и переходя по известному принципу от потенциалов к напорам, после преобразований получаем следующее выражение для понижения на стенке дрены в точке с координатами  $x=l_2-b, y=0, z=a$ :

$$\Delta H_D = \frac{q}{2\pi T} \left[ \frac{1}{2} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} R_* d\eta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2 \frac{\pi n a}{T} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} k_0 \left( \frac{\pi n \sqrt{b^2 + \eta^2}}{T} \right) d\eta \right] \quad (3)$$

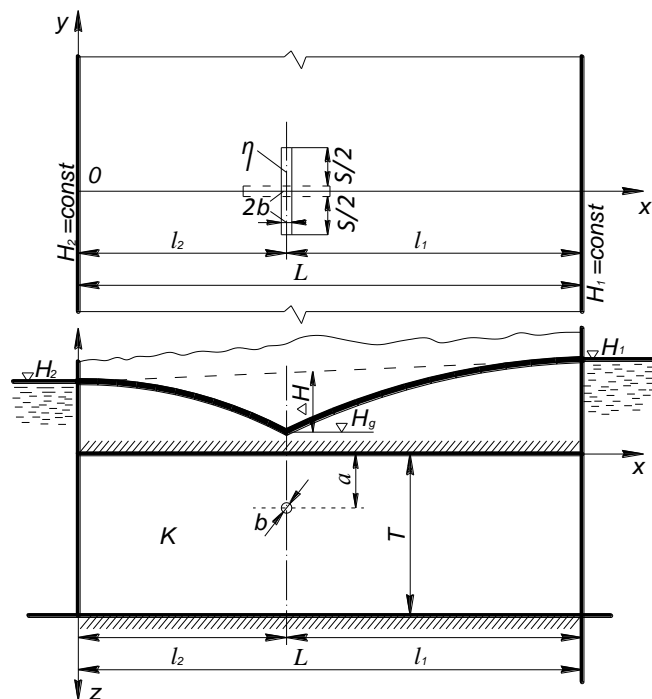


Рис. 1. Схема двустороннего несимметричного притока к горизонтальной несовершенной трубчатой дрене

где

$$R_* = \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi \eta}{L} - \cos \frac{2\pi l_2}{L}}{\operatorname{ch} \frac{\pi \eta}{L} - \cos \frac{\pi b}{L}}$$

при расположении дрены параллельно контурам питания и стока;

$$R_* = \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi b}{L} - \cos \frac{\pi(2l_2 - \eta)}{L}}{\operatorname{ch} \frac{\pi b}{L} - \cos \frac{\pi \eta}{L}}$$

при расположении дрены перпендикулярно к контурам питания и стока;

$$\Delta H_{\text{Д}} = \frac{(H_1 - H_2)}{L} + H_2 - H_{\text{Д}} \quad (4)$$

Выполнив интегрирование в уравнении (3) и сделав некоторые преобразования, получим окончательную формулу для определения расхода  $Q_d$  дрены длиной  $s \leq 0,5L$ :

$$Q_d = \frac{s\Delta H}{R_\beta + f}$$

где  $R_\beta$  — внешнее фильтрационное сопротивление;  $f$  — внутреннее фильтрационное сопротивление;  $\beta$  — угол наклона дрены к направлению потока воды.

При параллельном расположении дрены относительно сопротивление контуров питания и стока при  $\beta = \frac{\pi}{2}$  сопротивление:

$$R_{\pi/2} = \frac{s}{4\pi T} \ln \frac{s^2 + \frac{8L^2}{\pi^2} (1 - \cos \frac{2\pi l_2}{L})}{s^2} + \frac{L}{\pi^2} \sqrt{2(1 - \cos \frac{2\pi l_2}{L})} \operatorname{arctg} \frac{\pi s}{2L \sqrt{1 - \cos \frac{2\pi l_2}{L}}} \quad (6)$$

При расположении дрены перпендикулярно к контурам питания и стока при  $\beta = 0$  сопротивление:

$$R_0 = \left( \frac{s}{4\pi T} + \frac{L}{\pi^2 T} \right) \ln \left( \frac{2L}{\pi} \sin \frac{\pi l_2}{L} + \frac{s}{2} \cos \frac{\pi l_2}{L} \right) - \left( \frac{L}{\pi^2 T} \operatorname{tg} \frac{\pi l_2}{L} - \frac{s}{4\pi T} \right) \ln \left( \frac{2L}{\pi} \sin \frac{\pi l_2}{L} - \frac{s}{2} \cos \frac{\pi l_2}{L} \right) - \frac{s}{2\pi T} \ln \frac{s}{2} \quad (7)$$

Внутреннее фильтрационное сопротивление для обоих случаев расположения дрены будет:

при  $s \geq 2T$ ,  $0 < a < T$ ,  $l_2 > T$ ,  $l_L > T$

$$f = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{T}{2\pi b} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1 - \cos \frac{2\pi a}{T}} \right); \quad (8)$$

при  $s \geq 2T$  и  $a=0$

$$f = \frac{1}{\pi} \ln \frac{T}{\pi b}; \quad (9)$$

при  $s < 2T$  и  $0 \leq a \leq T$

$$f = \frac{s}{T} F, \quad (10)$$

где  $F = f\left(\frac{b_0}{T}, \frac{a}{T}\right)$  определяется по графику, приведенному на рис. 2;  $b_0$  определяется по формуле:

$$b_0 = \frac{s}{2 \ln \frac{s}{b}} \quad (11)$$

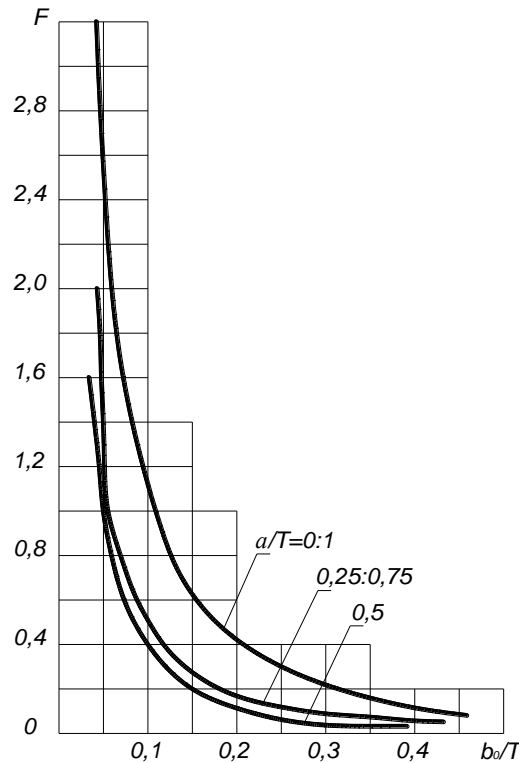


Рис. 2 График фильтрационного сопротивления

Для схемы одностороннего притока к дрене в выражении (2) отбрасывается знак суммирования по  $k$ , а для  $r_1$  и  $r_2$  принимается  $k = 0$ .

Окончательная формула для определения расхода  $Q_D$  дрены длиной  $s$  в этом случае будет:

$$Q_D = \frac{rs(H_1 - H_D)}{R_1 + f} \quad (12)$$

где

$$R_{1\pi/2} = \frac{s}{2\pi T} \ln \sqrt{\frac{16l^2 + s^2}{s^2}} + \frac{2l}{\pi T} \operatorname{arctg} \frac{s}{4l} \quad (13)$$

$$R_{10} = \frac{4l+s}{4\pi T} \ln \left( \frac{4l+s}{2} \right) - \left( \frac{4l-s}{4\pi T} \right) \ln \left( \frac{4l-s}{2} \right) - \frac{s}{2\pi T} \ln \frac{s}{2} \quad (14)$$

Сопротивление  $f$  определяется по формулам (8) — (10).

Предельный переход при  $s \rightarrow \infty$  (при котором также следует  $b = r_d$ ), выполненный в формуле (12), приводит к известным выражениям для бесконечно длинной горизонтальной дрены, расположенной параллельно прямолинейному контуру питания:

$$q_D = \frac{k(H_1 - H_D)}{\frac{l}{T} + \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{T}{2\pi r_D} + \frac{2}{2} \ln \frac{2}{1 - \cos \frac{2\pi a}{T}} \right)} \quad (0 < a < T); \quad (15)$$

$$q_D = \frac{k(H_1 - H_D)}{\frac{l}{T} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{T}{\pi r_D}} \quad (a = 0; T). \quad (16)$$

Формулами (5) и (12) можно также пользоваться для расчета горизонтальных совершенных дрен конечной длины, положив в них  $f = 0$ . Сравнивая формулу (12) для пространственного потока с формулами (15) и (16) для плоского потока нетрудно заметить, что при  $s > 2T$  выражения для внутреннего фильтрационного сопротивления  $f$  отличаются между собой только значением расчетного радиуса дрены. Это не столь существенное для практических расчетов отличие с увеличением  $\frac{s}{T}$ , вероятно, будет еще уменьшаться, так как при  $s \rightarrow \infty$ , по-видимому,  $b \rightarrow r_d$ . Однако окончательное решение этого вопроса может быть получено только после специального изучения. Поэтому при длине дрены  $s \geq 2T$  значение  $f$  для такой дрены можно принимать таким же, как при  $s \rightarrow \infty$ , заменив при этом  $r_d$  на  $b$ . Это позволяет при длине дрены  $s \geq 2T$ , а также при  $\frac{l}{T} = \frac{l_2}{T} > 1$  исследование пространственных задач фильтрации свести к исследованию плановых задач фильтрации, заменяя при помощи фильтрационного сопротивления  $f$ , взятого из плоского решения этой же задачи, несовершенную дренаю напором  $H_d$  совершенной дренаю напором  $H_n$ :

$$H_n = H_d + \frac{Q_D}{ks} f. \quad (17)$$

Формулой (17) можно воспользоваться при определении безнапорной пространственной фильтрации к дрене, осуществив по известному принципу переход от напорного потока к безнапорному (вводя в расчетные формулы среднюю мощность потока и внося некоторые уточнения в определение сопротивления  $f$ , аналогичные тем, которые рекомендуется при расчетах плоского безнапорного потока [6]). Для определения расхода дрены  $Q_d$  в случае безнапорной пространственной фильтрации можно также использовать прием, основанный на делении безнапорного потока горизонтальной плоскостью, проходящей через дрину, на безнапорную и напорную зоны, применяя для безнапорной зоны решение задачи как для совершенной дрены, а для напорной — полученное для  $a=0$  теоретическое решение.

Выполненные на пространственных моделях ЭГДА исследования безнапорной фильтрации к дрине конечной длины показали, что в первом случае расчетные расходы  $Q_d$  по сравнению с опытными оказались заниженными в среднем на 10—15%, а во втором — на столько же завышенными.

При расположении горизонтальной дрены под горизонтальным дном водоема или водотока (рис. 3), согласно работе [7], решение задачи будет иметь вид:

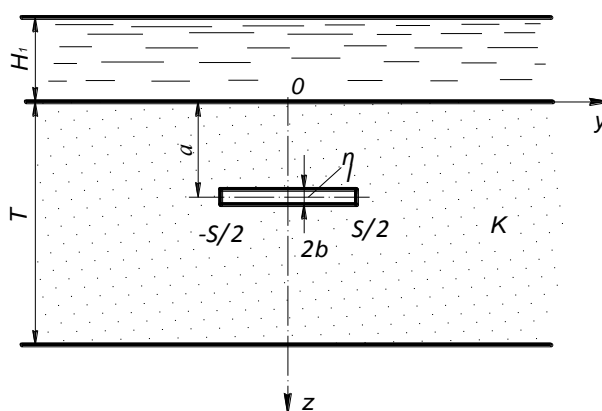


Рис. 3. Схема расположения горизонтальной дрены под горизонтальным дном водоема или водотока



$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{\pi T} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi s}{2T} \sin \frac{(2n+1)\pi a}{2T} \times \times \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} K_0 \left( \frac{(2n+1)\pi r}{2T} \right) d\eta + C, \quad (18)$$

где:

$$r = \sqrt{x^2 + (\eta - y)^2}.$$

Выполнив некоторые преобразования, определим понижение на дрене в точке с координатами  $x = b, y = 0, z = a$ :

$$H_1 - H_D = \frac{q}{\pi k T} \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)\pi a}{2T} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} K_0 \left[ (2n+1)\pi \frac{\sqrt{b^2 + \eta^2}}{2T} \right] d\eta. \quad (19)$$

В уравнении (19) сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} K_0 \left[ (2n+1)\pi \frac{\sqrt{b^2 + \eta^2}}{2T} \right] d\eta &= 2 \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} K_0 \left[ (2n+1)\pi \frac{\sqrt{b^2 + \eta^2}}{2T} \right] d\eta \approx \\ &\approx \int_0^{\infty} K_0 \left[ \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{T} \sqrt{b^2 + \eta^2} \right] d\eta = T \int_{\frac{\pi b}{T}}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\eta} d\eta. \end{aligned}$$

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)\pi a}{2T} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} K_0 \left[ (2n+1)\pi \frac{\sqrt{b^2 + \eta^2}}{2T} \right] d\eta = \\ &= \frac{T}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{(2n+1)\pi a}{T} \right) \int_{\frac{\pi b}{T}}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\eta} d\eta. \end{aligned}$$

Это выражение преобразовываем к виду:

$$\frac{F}{T} = \int_{\frac{\pi b}{T}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\eta}{2}}}{1 - e^{-\eta}} d\eta - \operatorname{Re} \int_{\frac{\pi b}{T}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\eta}{2} + \frac{i\pi a}{T}}}{1 - e^{\eta + \frac{2i\pi a}{T}}} d\eta.$$

Выполняя интегрирование, находим:

$$\frac{2F}{T} = \ln \frac{1 + e^{-\frac{\pi b}{2T}}}{1 - e^{-\frac{\pi b}{2T}}} - \ln \left| \frac{1 + e^{-\frac{\pi b + 2i\pi a}{2T}}}{1 - e^{-\frac{\pi b + 2i\pi a}{2T}}} \right| \approx \ln \frac{4T - \pi b}{\pi b} + \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2T} \right).$$

Таким образом, для дрены с  $s \geq 2T$  запишем окончательную формулу для определения расхода  $Q_D$ :

$$Q_D = \frac{2\pi k s (H_1 - H_D)}{\ln \frac{4T - \pi b}{\pi b} + \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2T} \right)}. \quad (20)$$

При расположении дрены на водоупоре ( $a=T$ ):

$$Q_D = \frac{k(H_1 - H_D)}{F_D}, \quad (21)$$

где:

$$f_D = \frac{1}{\pi s} \ln \frac{4T - \pi b}{\pi b}, \quad s \geq 2T; \quad (22)$$

$$f_D = \frac{1}{2\pi} (2T \ln \frac{s}{b} - 0,7s), \quad s < 2T; \quad (23)$$

Формула (20) отличается от аналогичной формулы для расхода отрезка длиной  $s$  бесконечно длинной дрены, полученной В. В. Ведерниковым [8], только принятыми значениями расчетных радиусов дрен  $b$  и  $r_d$ . Отсюда также следует вывод, что при длине дрены  $s \geq 2T$  рассматриваемую пространственную задачу можно приближенно свести к плоской задаче, заменив в ней  $r_d$  на  $b$ . Однако, как и в предыдущей задаче, очевидность такой прямой замены еще недостаточно обоснована.

Таблица № 1

Значения сопоставительного коэффициента  $k_c$

$\frac{b}{T}$	$\frac{s}{T}$				
	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0
0.01	1.00	1.01	1.04	1.01	1.01
0.05	1.00	1.01	1.05	1.03	1.00
0.10	1.00	1.00	1.04	1.02	1.01
0.20	1.00	1.03	1.025	0.94	0.97

В таблице для случая  $a = 0$  и определенных значениях  $\frac{b}{T}$  и  $\frac{s}{T}$  приведены значения сопоставительного коэффициента  $k_c$  представляющего собой отклонение величины  $f$ , вычисленной по формуле (22) или (23), от этой же величины  $f$ , полученной из более точного, но сравнительно сложного решения [2, 9, 10].

### Выводы

Как видно из таблицы, рекомендуемые для расчетов приближенные формулы дают вполне приемлемые результаты.

## Литература

1. Борисов Ю.П., Пилатовский В.П., Табаков В.П. Разработка нефтяных месторождений горизонтальными и многозабойными скважинами. М: Недра, 1964. 154 с.
2. Разумов Г.А. В кн.: Труды лаборатории инженерной гидрогеологии», 4. М.: Госстройиздат, 1962. 147с.
3. Kordas B. Arc. "Gidrotechnik", 8, 3, Warsaw, 1961. pp. 324-328.
4. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.: Гостоптехиздат, 1949. 628с.
5. Веригин Н. Н. Методы определения фильтрационных свойств горных пород. М.: Госстройиздат, 1962. 181 с.
6. Шестаков В.М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. Изд-во МГУ, 1965. 233с.
7. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676с.
8. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.—Л.: Госстройиздат, 1939. 251с.
9. Бандурин М.А. Проблемы оценки остаточного ресурса длительно эксплуатируемых водопроводящих сооружений // Инженерный вестник Дона, 2012, №3. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/891/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/891/).
10. Zhou Y., Wang Y., Gold A.J., August P.V. Modeling watershed rainfall-runoff relations using impervious surface-area data with high spatial resolution // Hydrogeology Journal. 2010. T. 18. № 6. С. 1413-1423.

## References

1. Borisov Ju.P., Pilatovskij V.P., Tabakov V.P. [Development of oil fields by horizontal and multihole wells]. M: Nedra, 1964. 154 p.
  2. Razumov G.A. V kn.: Trudy laboratorii inzhenernoj gidrogeologii» 4. M.: Gosstrojizdat, 1962. 147p.
-



3. Kordas B. Arc. "Gidrotechnik", 8, 3, Warsaw, 1961. pp. 324-328.
4. Masket M. [The flow of homogeneous liquids in a porous medium]. М.: Gostoptehizdat, 1949. 628p.
5. Verigin N. N. [Methods for determining the filtration properties of rocks]. М.: Gosstrojizdat, 1962. 181p.
6. Shestakov V.M. [Theoretical foundations for the assessment of backwater, water supply and drainage]. Izd-vo MGU, 1965. 233p.
7. Polubarinova-Kochina P.Ja. [Theory of groundwater movement]. М.: Gostehizdat, 1952. 676p.
8. Vedernikov V. V. [Filtration theory and its application in the field of irrigation and drainage]. М. L.: Gosstrojizdat, 1939. 251p.
9. Bandurin M.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, №3. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/891/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/891/).
10. Zhou Y., Wang Y., Gold A.J., August P.V. Hydrogeology Journal. 2010. T. 18. № 6. pp. 1413-1423.

**Дата поступления: 16.03.2024**

**Дата публикации: 22.04.2024**