Моделирование распределения поля в магнитных системах электротехнических устройств с использованием нелинейных многополюсников

А.Н. Ткачев, А.И. Кондратенко

Южный Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, Новочеркасск

Аннотация: Рассматривается задача моделирования распределения магнитного поля в магнитопроводах электротехнических устройств с целью оценки их характеристик в режимах эксплуатации. Проблема сводится к решению краевой задачи для уравнения эллиптического типа в ферромагнитной среде с нелинейными характеристиками. Для расчета предложено использовать блочные элементы в виде многоугольников произвольной конфигурации, которые рассматриваются как нелинейные многополюсники. Вебер-амперные характеристики многополюсников находятся в результате решения краевых задач для многоугольников, образующих блочные элементы.
Краевые задачи решаются с использованием комплексного метода граничных элементов, что обеспечивает прямое нахождение уравнений связи между магнитными напряжениями и потоками многополюсников.
Нелинейность характеристик учитывается по найденному в результате расчета распределению поля на границе многополюсников путем корректировки магнитных проницаемостей блочных элементов, которая выполняется итерационно.
Ключевые слова: электротехническая система, магнитная цепь, краевая задача, блочный элемент, многополюсник, комплексный граничный элемент, матрица проводимостей.

Методы теории цепей широко используются для моделирования различных технических систем [1,2]. Так, схемы замещения магнитопроводов электротехнических устройств применяются для анализа распределения поля в их элементах [1,2], особенно на этапах проектирования или оптимизации, когда возникает необходимость выполнения многовариантных расчетов. При этом на точность расчетов существенное влияние оказывает выбранная топология схемы замещения и магнитные характеристики ее элементов, которые при насыщении электротехнической стали в реальных режимах эксплуатации описываются нелинейными зависимостями.

Сложившиеся подходы к построению схем замещения не являются формализованными, в основном основываются на эвристических допущениях о характере пространственного распределения поля в магнитных системах. Это не только ограничивает возможности применения магнитных цепей для моделирования распределения поля в магнитопроводах электротехнических систем, но и делает проблематичным такое приближение в тех случаях, когда локальное перемагничивание стали носит пространственный характер.

Ниже описан формализованный подход к построению схем замещения магнитопроводов электротехнических устройств с помощью нелинейных многополюсников, которые могут быть использованы для приближенного анализа распределения магнитного поля при любых режимах локального перемагничивания.

Рассмотрим следующую типовую задачу, к решению которой сводится расчет поля в магнитных системах. Пусть область G на плоскости с границей L (рис.1) заполнена ферромагнитной средой с нелинейными характеристиками, которые задаются магнитной проницаемостью $\mu(H)$. При этом $\overline{B}=\mu(H)\overline{H}$, где $\overline{B}$, $\overline{H}$ - индукция и напряженность магнитного поля соответственно.

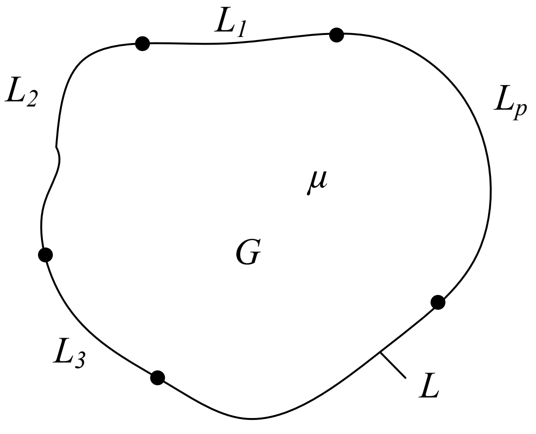

Рис. 1. – Расчетная область

Тогда магнитное поле в области G описывается системой уравнений

$$rot\overline{H}=0 \;\; ; \;\; div\overline{B}=0 \;\; ; \;\; \overline{B}=\mu\overline{H} \; . \qquad (1)$$

Будем считать, что на участках L_i, $i=\overline{1,p}$, границы L области G известна либо касательная составляющая напряженности магнитного поля H_τ, либо нормальная составляющая индукции B_n:

$$H_\tau\big|_{L_i} = H_\tau^0\big|_{L_i}; \quad i=\overline{1,p}; \tag{2}$$

$$B_n\big|_{L_i} = B_n^0\big|_{L_i}; \quad i=\overline{1,p}, \tag{3}$$

где H_τ^0, B_n^0- известные на участках L_i границы L функции. В дополнение к граничным условиям (2), (3) будем считать заданными магнитные потоки через участки границы L_i, на которой задана напряженность поля:

$$\int_{L_i} B_n dl = \Phi_i^0, \tag{4}$$

где Φ_i^0- известные значения магнитного потока через соответствующие участки границы L_i.

Заметим, что на границе L области выполняются следующие соотношения:

$$\oint_L \overline{B}\, d\bar{l} = 0;$$

$$\oint_L \overline{H}\, d\bar{l} = 0.$$

Поэтому условия (2), (3) и последние равенства должны быть согласованы.

Для моделирования распределения поля в области G будем использовать блочные элементы [8,9], которые строятся с использованием двух допущений, характерных для расчета поля в нелинейных средах. Блочным элементом в дальнейшем будем называть любой многоугольник, расположенный в области G, в пределах которого поле меняется так, что магнитную проницаемость в его отдельных точках можно считать постоянной. Заметим, что такая линеаризация является стандартным приемом при численных расчетах физических полей в нелинейных средах.

С учетом уравнений (1) при принятом допущении, магнитное поле в каждом многоугольном элементе разбиения Ω_k с границей Γ_k описывается системой уравнений:

$$rot\overline{H} = 0 \;\; ; \;\; div\overline{B} = 0 \;\; ; \;\; \overline{B} = \mu_k \overline{H}; \; \mu_k = const\,. \tag{5}$$

При этом на общих участках Γ_{rs} границ элементов Ω_r, Ω_s должны выполняться условия сопряжения

$$H_\tau^{(r)}\Big|_{\Gamma_{rs}} = H_\tau^{(s)}\Big|_{\Gamma_{rs}} \;\; ; \;\; B_n^{(r)}\Big|_{\Gamma_{rs}} = B_n^{(s)}\Big|_{\Gamma_{rs}}\,, \tag{6}$$

где в левой и правой частях приводятся предельные значения касательной составляющей напряженности и нормальной компоненты индукции со стороны элементов Ω_r, Ω_s соответственно.

С учетом уравнений (5) поле $\overline{H}$ в каждом элементе разбиения Ω_k можно описать с помощью двух потенциалов $u(x,y)$ или $v(x,y)$, равных:

$$\overline{H} = grad\, u; \;\; \overline{H} = rot\left(v\bar{e}_z\right).$$

При этом оба потенциала в области Ω_r являются гармоническими функциями и на общих участках границы Γ_{rs} удовлетворяют условиям

$$u^{(r)}\Big|_{\Gamma_{rs}} = u^{(s)}\Big|_{\Gamma_{rs}} \;\; ; \;\; \mu_r \frac{\partial u^{(r)}}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma_{rs}} = \mu_s \frac{\partial u^{(s)}}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma_{rs}} \;\; ; \tag{7}$$

$$\mu_r v^{(r)}\Big|_{\Gamma_{rs}} = \mu_s v^{(s)}\Big|_{\Gamma_{rs}} \;\; ; \;\; \frac{\partial v^{(r)}}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma_{rs}} = \frac{\partial v^{(s)}}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma_{rs}}\,. \tag{8}$$

Каждому блочному элементу $\Omega\left(\Omega \in \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots\}\right)$ с границей $\Gamma\left(\Gamma \in \{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\}\right)$ поставим в соответствие многополюсник так, как это показано на рис. 2.

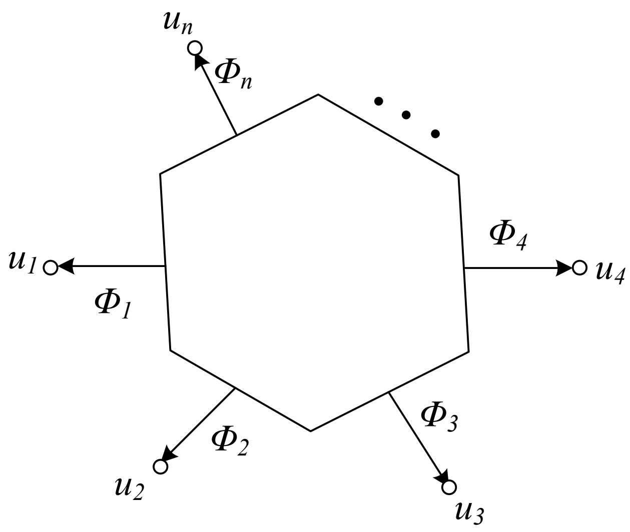

Рис.2. – Блочный элемент, совмещенный с многополюсником

Опишем алгоритм нахождения матриц проводимостей Y и сопротивлений Z, связывающих магнитные потоки Φ_i поля $B=\hat{\mu}\overline{H}$ $(\hat{\mu}=\mu_k,\, k=1,2,...)$ через сечения, совпадающие с ребрами Γ_{rs}, с магнитными потенциалами u_j, определяемыми через поле $\overline{H}$. Уравнения связи зададим равенствами:

$$\overline{\Phi}=\overline{Y}\overline{u};\;\; \overline{u}=Z\overline{\Phi}; \tag{9}$$

$$\overline{\Phi}=(\Phi_1,\Phi_2,...,\Phi_n);\;\; \overline{u}=(u_1,u_2,...,u_n).$$

Заметим, что введенные магнитные потенциалы *u, v* являются сопряженными функциями. Поэтому их можно рассматривать как действительную и мнимую части некоторой аналитической в области Ω функции комплексного переменного:

$$\omega(z)=u(z)+iv(z)\,. \tag{10}$$

При этом гармоническая функция *u*(*x,y*), определена с точностью до постоянного слагаемого, а все функции *v*(*x,y*), сопряженные с функцией *u*(*x,y*), также могут отличаться только на постоянную [9,10]. Обеспечивая единственность решения, достаточно положить в каких-либо двух точках M, $N \in \Gamma$:

$$u(M)=0,\ v(N)=0. \tag{11}$$

Для аналитической однозначной функции $\omega(z)$ (10) в односвязной области Ω справедлива интегральная формула Коши [10]:

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{\omega(\xi)}{\xi-z}d\xi\ , \tag{12}$$

где направление обхода контура Γ выбрано таким образом, что при обходе контура область Ω остается слева.

Введем в комплексной плоскости z, систему узлов $\{z_j\}_{j=1}^{n}$, где n - число узлов на контуре Γ. Пронумеруем узлы последовательно, начиная с единицы в положительном направлении обхода контура Γ, при котором область Ω остается слева. На контуре Γ определим n граничных элементов Γ_j, следующими соотношением [9]:

$$\Gamma=\bigcup_{j=1}^{n}\Gamma_j\ ,$$

где $\Gamma_j=\{z\in\Omega;\ z=(1-s)z_j+sz_{j+1},\ 0\le s\le 1\};\quad \Gamma_{j-1}\cap\Gamma_j=z_j;\quad z_{n+1}=z_1$, причем нумерация граничных элементов соответствует нумерации узлов.

Функцию $\omega(z)$ на границе Γ аппроксимируем кусочно-линейной функцией вида

$$G(z)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j e_j(z), \tag{13}$$

где $\omega_j=\omega(z_j)$, а базисная функция $e_j(z)$, соответствующая узлу z_j, определяется равенством

$$e_j(z)=\begin{cases}(z-z_{j-1})/(z_j-z_{j-1}), & z\in\Gamma_{j-1},\\ (z_{j+1}-z)/(z_{j+1}-z_j), & z\in\Gamma_j,\\ 0, & z\notin\Gamma_{j-1}\cup\Gamma_j.\end{cases}\tag{14}$$

Из выражения (14) следует, что функция $G(z)$ на Γ является непрерывной и $G(z_j)=u_j+iv_j$, где u_j, v_j - значения магнитных потенциалов в узле z_j. Подставляя функцию (13) в интегральную формулу Коши (12), получим:

$$\hat{\omega}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{G(\xi)}{\xi-z}d\xi\ ,\tag{15}$$

где z - внутренняя точка области Ω $(z\notin\Gamma)$. Функция $\hat{\omega}(z)$ является аппроксимирующей для функции $\omega(z)$ в области Ω с погрешностью, обусловленной приближением функции $\omega(z)$ кусочно-линейной функцией (13) на границе Γ. С учетом (13) выражение (15) для $\hat{\omega}(z)$ можно записать следующим образом:

$$\hat{\omega}(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma_j}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\ ,\quad z\notin\Gamma,\quad z\in\Omega\ .\tag{16}$$

На каждом элементе Γ_j функция $G(z)$ задается равенством:

$$G(z)=\{e_j(z)u_j+e_{j+1}(z)u_{j+1}\}+i\{e_j(z)v_j+e_{j+1}(z)v_{j+1}\}\ ,\ z\in\Gamma_j.\tag{17}$$

Используя соотношения (17) и (14), найдем интеграл в равенстве (16) по каждому элементу Γ_j:

$$\int_{\Gamma_j}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\Gamma_j}\frac{(z_{j+1}-\zeta)\omega_j+(\zeta-z_j)\omega_{j+1}}{(z_{j+1}-z_j)(\zeta-z)}d\zeta,\ z\in\Omega,\ z\notin\Gamma.\tag{18}$$

После вспомогательных преобразований, получим из формулы (18)

$$\int_{\Gamma_j}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{z_{j+1}\omega_j-z_j\omega_{j+1}}{z_{j+1}-z_j}\int_{\Gamma_j}\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{\omega_{j+1}-\omega_j}{z_{j+1}-z_j}\int_{\Gamma_j}\frac{\zeta d\zeta}{\zeta-z}\ ;$$

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\zeta d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\Gamma_j} \left(1 + \frac{z}{\zeta - z}\right) d\zeta = z_{j+1} - z_j + z \int_{\Gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \ ;$$

$$\int_{\Gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \ln(\zeta - z)\Big|_{z_j}^{z_{j+1}} = \ln\left|\frac{z_{j+1} - z}{z_j - z}\right| + i\theta(j+1, j),$$

где $\theta(j+1, j)$ - угол между лучами, соединяющими узлы z_j и z_{j+1} с точкой $z \in \Omega$ рис.3. Запишем интеграл (18) в виде:

$$\int_{\Gamma_j} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \omega_{j+1} - \omega_j + \omega_{j+1} \frac{z - z_j}{z_{j+1} - z_j} h_j - \omega_j \frac{z - z_{j+1}}{z_{j+1} - z_j} h_{j+1} \ ,$$

$$h_j = \ln\left|\frac{z_{j+1} - z}{z_j - z}\right| + i\theta(j+1, j).$$

Подставив полученные выражения в формулу (16), получим

$$\hat{\omega}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} (\omega_{j+1} - \omega_j) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \frac{(z - z_j)\omega_{j+1} - (z - z_{j+1})\omega_j}{z_{j+1} - z_j} h_j \,, \qquad (19)$$

где принято $\omega_{n+1} = \omega_1$, $z_{n+1} = z_1$. Тогда первая сумма в равенстве (19) равна нулю и, поэтому

$$\hat{\omega}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \frac{(z - z_j)\omega_{j+1} - (z - z_{j+1})\omega_j}{z_{j+1} - z_j} h_j \ . \qquad (20)$$

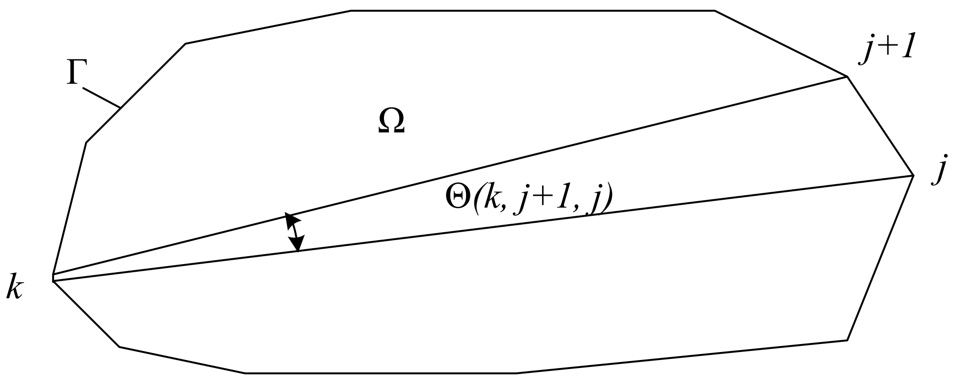

Рис.3. - К вычислению интеграла по контуру *Г*

Равенство (20) задает аппроксимирующую функцию (15) во внутренних точках области Ω через узловые граничные значения комплексного потенциала ω.

Для определения величин u_j, v_j поступим следующим образом. Внутреннюю точку z области Ω устремим к узлу z_k, $z \to z_k$, тогда, переходя к пределу в левой и правой части равенства (20), получим:

$$\lim_{z \to z_k} \hat{\omega}(z) = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \frac{(z - z_j)\omega_{j+1} - (z - z_{j+1})\omega_j}{z_{j+1} - z_j} \ln\left(\frac{z_{j+1} - z}{z_j - z} \right).$$

Находя предел в последнем выражении, имеем

$$\omega_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k \\ j \neq k-1}}^{n} \frac{(z_k - z_j)\omega_{j+1} - (z_{j+1} - z_k)\omega_j}{z_{j+1} - z_j} \ln\left(\frac{z_{j+1} - z_k}{z_j - z_k} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \lim_{z \to z_k} \left\{ \frac{(z - z_{k-1})\omega_k - (z - z_k)\omega_{k-1}}{z_k - z_{k-1}} \ln\left(\frac{z_k - z}{z_{k-1} - z} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(z - z_k)\omega_{k+1} - (z - z_{k+1})\omega_k}{z_{k+1} - z_k} \ln\left(\frac{z_{k+1} - z}{z_k - z} \right) \right\}.$$

Упростив выражение, стоящее в скобках последнего равенства, получим:

$$\omega_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \frac{(z_k - z_j)\omega_{j+1} - (z_k - z_{j+1})\omega_j}{z_{j+1} - z_j} \ln\left(\frac{z_{j+1} - z_k}{z_j - z_k} \right) +$$

$$+ \omega_k \frac{1}{2\pi i} \ln\left(\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k-1} - z_k} \right), \quad k = \overline{1, n}. \tag{21}$$

Уравнения (21) после разделения в них действительной и мнимой части можно записать в виде:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{kj}u_j-\beta_{kj}v_j)=0;\\&\sum_{j=1}^{n}(\beta_{kj}u_j+\alpha_{kj}v_j)=0.\end{aligned}\qquad(22)$$

При этом систему (22) необходимо дополнить уравнениями (11).

Для определения матрицы проводимостей Y (9) будем находить решение системы (22) при значениях потенциалов узлов равных $\bar{u}=\bar{U}_k=\left(\underbrace{0,\ldots,0,1}_{k},0,\ldots0\right)$, $k=1,2,\ldots n$. Отметим, что система уравнений (22) имеет число уравнений, в два раза превышающее число неизвестных. Поэтому для решения этой системы используется метод наименьших квадратов.

По найденным узловым значениям потенциала v находятся потоки через ребра многоугольника. Так, если к ребру с потоком Φ_k примыкают вершины (узлы) с потенциалами v_i, v_{i+1}, то поток через него равен $\Phi_k=v_{i+1}-v_i$. В результате расчетов при каждом заданном распределении потенциалов узлов $\bar{u}=\bar{U}_k$ определяется k-й столбец матрицы Y и далее сама матрица. Матрица Z находятся аналогично.

После определения уравнений связи многополюсников (9), соответствующих блочным элементам разбиения, выполняется анализ распределения потоков в магнитных системах исследуемых устройств. При этом условия на границе расчетной области для нормальной составляющей индукции позволяют задать часть потоков через участки блочных элементов, примыкающие к границе. Учет граничного условия относительно касательной составляющей напряженности обеспечивается соответствующим заданием разности магнитных потенциалов для узлов многополюсника, совмещенных с границей. Выполнение условия непрерывности поля на общих участках границы соседних блочных элементов обеспечивается в слабой форме путем приравнивания потенциалов общих узлов и потоков магнитной индукции через общие участки границы, вычисленных в примыкающих областях разбиения с разными магнитными проницаемостями.

Нелинейность характеристик учитывается за счет того, что проницаемости в областях разбиения уточняются итерационно по значениям напряженности, получаемым в результате расчета. Для этого используется ее среднее значение напряженности на границе каждого элемента разбиения, которое приближенно может быть оценено по найденному распределению потенциалов и потоков в многополюсниках. Отметим, что матрицы многополюсников находятся однократно и корректировке не подлежат.

Литература

1. Носков В.Н., Пустоветов М.Ю.Компьютерное моделирование режима холостого хода электромеханического расщепителя фаз на базе трехфазного асинхронного электродвигателя// Инженерный вестник Дона, 2016, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3633/.

2. Пивнев В.В., Басан С.Н. Математическое моделирование нелинейных характеристик элементов применительно к задаче реализации двухполюсников с заданными нелинейными зависимостями// Инженерный вестник Дона, 2016, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3857/.

3. Нго Фыонг Ле, Гульков Г.И. Эквивалентная схема магнитной цепи синхронного двигателя с инкорпорированными магнитами. Энергетика, 2015, №4. с. 13-24.

4. Miller T.J.E. Brushless Permonent-Magnet and Relactance Motor Drives. Oxford: Clarendon Press, 1989. pp. - 207.

5. Булыжев Е.М., Меньшов Е. Н., Джавахия Г.А. Оптимизация магнитного сепаратора. – Известия Самарского центра РАН, т.13, №4, 2015. с. 111-116.

6. Носов Г.В., Лусс А.А. Расчет внешнего магнитного поля рельслтронов. Фундаментальные исследования. 2013. №10. с. 3363-3367.

7. Буль О.Б. Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов: Магнитные цепи, поля и программа FEMM. М.: Издательский центр «Академия», 2005. 336 с.

8. Ткачев А.Н., Клименко В.В. Метод сопряженных потенциалов для расчета двухмерных электрических и магнитных полей: монография. Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ), 2012. 172 с.

9. Tkachev A., Pashkovskiy A., Burtceva O. Application of block elements method for a calculation of the magnetic field and force characteristics in electromechanical systems. Vol. 129: International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2015). Procedia Engineering. 2015. pp. 288-293.

10. T. Hromadko, C. Lai, The Complex Variable Boundary Element Method in Engineering Analysis, Springer Vergas New York Inc, 1987. pp. 303.

References

1. Noskov V.N., Pustovetov M.Ju. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3633/.

2. Pivnev V.V., Basan S.N. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3857/.

3. Ngo Fyong Le, Gul'kov G.I. Jenergetika, 2015, №4. pp. 13-24.

4. Miller T.J.E. Brushless Permonent-Magnet and Relactance Motor Drives. Oxford: Clarendon Press, 1989. pp. 207.

5. Bulyzhev E.M., Men'shov E. N., Dzhavahija G.A. Izvestija Samarskogo centra RAN, t.13, №4, 2015. pp. 111-116.

6. Nosov G.V., Luss A.A. Fundamental'nye issledovanija. 2013. №10. pp. 3363-3367.

7. Bul' O.B. Metody rascheta magnitnyh sistem jelektricheskih apparatov: Magnitnye cepi, polja i programma FEMM [Methods for calculating the magnetic systems of electrical apparatus: Magnetic circuits, fields and the program FEMM]. – M.: Izdatel'skij centr «Akademija», 2005. 336 p.

8. Tkachev A.N., Klimenko V.V. Metod soprjazhennyh potencialov dlja rascheta dvuhmernyh jelektricheskih i magnitnyh polej: monografija [The method of conjugate potentials for the calculation of two-dimensional electric and magnetic fields: monograph]. Juzh.-Ros. gos. tehn. un-t. Novocherkassk: JuRGPU (NPI), 2012. 172 p.

9. Tkachev A., Pashkovskiy A., Burtceva O. Application of block elements method for a calculation of the magnetic field and force characteristics in electromechanical systems. Vol. 129: International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2015). Procedia Engineering. 2015. pp. 288-293.

10. T. Hromadko, C. Lai, The Complex Variable Boundary Element Method in Engineering Analysis, Springer Vergas New York Inc, 1987. pp. 303.