

## Алгоритм определения локальных характеристик кривых поверхностей

*Т.В. Гончарова*

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

**Аннотация:** В статье рассматривается графический метод определения локальных характеристик кривых поверхностей сложной геометрической формы, заданных двумя своими изображениями на проекционном чертеже. Обосновывается постановка технической задачи по определению главных радиусов кривизны поверхности при помощи трех нормальных сечений. Описанный метод может быть использован при конструировании различных изделий во многих областях техники, строительства и архитектуры.

**Ключевые слова:** кривизна поверхности, линейчатые поверхности, радиус кривизны, сечение поверхности, радиус-вектор.

Рассмотрим определение локальных характеристик кривых поверхностей графическим методом. Характеристиками являются средняя кривизна поверхности  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  и гауссова кривизна  $K = \frac{1}{R_1 R_2}$  [1-3],

для вычисления их находятся главные радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$ . Если они известны, определяется не только характер и кривизна поверхности в данной ее точке, но и радиус кривизны любого нормального сечения, проходящего через эту точку и наклоненного к одному из главных под некоторым углом.

Часто в технике и строительстве задаются кривые поверхности (крыло самолета и др.) с неизвестными аналитическими формулами (главные радиусы кривизны не определяются). Чаще всего изображение поверхности определяется рядом принадлежащих ей кривых линий, образующих каркас из плоских сечений [4, 5]. На чертеже поверхности можно всегда построить три линии, проходящие через некую точку и принадлежащие этой поверхности. Положим, поверхность в пределах такой точки состоит из точек одного типа. Поэтому не исключается, что они принадлежат границе, разделяющей области эллиптических и гиперболических точек поверхности.

Поставлена задача определения главных радиусов кривизны поверхности по двум проекциям трех инцидентных ей кривых линий, пересекающихся в точке. Положим, кривые – нормальные сечения

поверхности. Тогда радиус кривизны ( $\rho$ ) каждого сечения выражается через главные радиусы кривизны формулы Эйлера (1), где  $\varphi$  – угол наклона плоскости нормального сечения к плоскости одного из главных [6 - 9].

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{R_1 + R_2 - (R_1 - R_2) \cos 2\varphi}{2R_1 R_2} \right), \quad (1)$$

Положим, что  $R_1 + R_2 = 2a$  и  $R_1 - R_2 = 2c$ , подставим в формулу Эйлера, и после преобразований получим формулу (2), где  $b^2 = a^2 - c^2$ .

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{a - \cos 2\varphi_1} \right), \quad (2)$$

Так как  $b^2 = ap$  и  $c = a\varepsilon$ , то формула принимает следующий вид (3).

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1 - \cos 2\varphi_1} \right). \quad (3)$$

Радиус кривизны нормального сечения, наклоненного плоскостью к плоскости одного из главных под углом  $\varphi$ , равен по длине фокальному радиусу-вектору конического сечения, наклонному к полярной оси его под углом  $2\varphi$ .

Предполагается, что если точка поверхности – эллиптическая (знаки  $R_1$  и  $R_2$  – одинаковые), то коническое сечение – эллипс (рис.1) с большой осью  $AB = 2a = R_1 + R_2$  и межфокусным расстоянием  $F_1F_2 = 2c = R_1 - R_2$ .

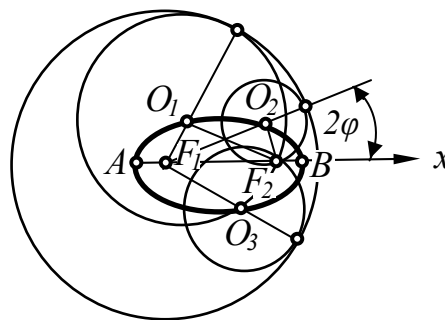


Рис. 1. Эллиптическая точка

Если же точка – гиперболическая (знаки  $R_1$  и  $R_2$  – разные), то сечение представляет собой гиперболу с длиной действительной оси  $AB = 2a = R_1 - R_2$  и межфокусным расстоянием  $F_1F_2 = 2c = R_1 + R_2$  (рис. 2). Радиусы-векторы,

проведенные из  $F$  к разным ветвям гиперболы, соответствуют радиусам кривизны, имеющим противоположные знаки [1, 3, 6].

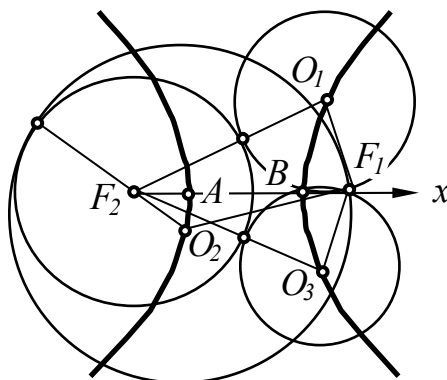


Рис. 2. Гиперболическая точка

Если исследуется параболическая точка, то коническое сечение представляет собой параболу, с полупараметром  $AF = \frac{p}{2} = R_1$ , а расстоянием от фокуса до несобственной вершины  $FB_\infty = \infty = R_2$  (рис. 3).

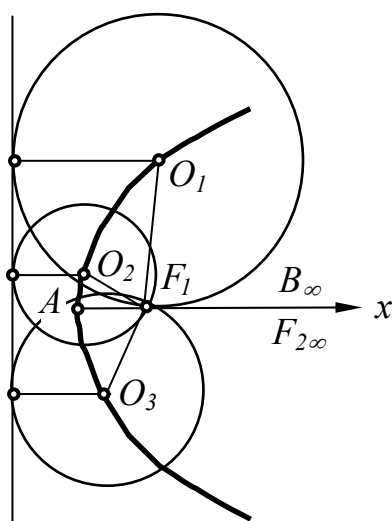


Рис. 3. Параболическая точка

Примем для удобства отсчета углов  $\varphi$ , что полярная ось ( $x$ ) конического сечения направлена от фокуса  $F$  (полюса) вправо (рис. 1–3). Затем, определяя кривизну в точке поверхности при помощи трех нормальных сечений, имеем, следующие данные: радиусы кривизны ( $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ) сечений и два угла между плоскостями первого, второго сечений ( $\psi$ ) и первого, третьего ( $\delta$ ).

Необходимо определить после нахождения этих величин, является ли исследуемая точка эллиптической, гиперболической или параболической.

Установим признаки типа точки поверхности. У эллиптической точки радиусы кривизны  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  однозначны, можно построить окружность ( $F_1$ ), касающуюся трех окружностей  $O_1, O_2, O_3$  внутренним образом, описанную вокруг них. У гиперболической точки есть два различных случая: 1. Один из радиусов кривизны имеет знак, отличный от знаков двух дуг. 2. Радиусы  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  однозначны, провести окружность ( $F_1$ ), касающуюся окружностей  $O_1, O_2, O_3$  внутренним образом, описанную вокруг них нельзя. У параболической точки характерна общая касательная к окружностям  $O_1, O_2, O_3$  – прямая.

Определив тип точки поверхности, строится соответствующее коническое сечение по заданному его фокусу ( $F$ ) и трем радиусам-векторам  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  [9, 10]. Вычерчивать сечение полностью нецелесообразно, т.к. для определения  $R_1, R_2$  достаточно найти только его основные параметры  $2a$  и  $2c$ .

Приведенный в данной работе способ может быть использован в различных областях техники, строительства и архитектуры. Особый интерес представляют использование способа для определения кривизны сложных пространственных поверхностей, т.к. в этом случае значительно упрощаются графические построения и обеспечивается высокая точность результатов.

### Литература:

1. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. Москва, 1974. 176 с.
2. Фиников С. П. Теория поверхностей. Л.: Наука, 1934. 205 с.
3. Четвертухин Н.Ф. Методы геометрических построений. Москва, 1952. 147 с.
4. Замятин А.В., Замятина Е.А. Алгоритм построения развертки поверхностей // Инженерный вестник Дона, 2012, №4-2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1233/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1233/).

5. Замятин А.В. Алгоритм построения точек пересечения нелинейчатых поверхностей // Инженерный вестник Дона, 2010, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/233/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/233/).
6. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. М.–Л.: Гостехиздат, 1949. 511 с.
7. Билимович А.Д. О гауссовой кривизне, Киев, 1904. 220 с.
8. Летников А.В. О кривизне поверхности в данной точке. Москва, 1868. 140 с.
9. Forsyth A. Lectures on the differential geometry of surfaces, Cambridge, 1920. 564 p.
10. Cesaro E. Vorlesungen uber naturliche Geometrie, Leipzig, 1901. 351 p.

#### References:

1. Pogorelov A. V. Differentsial'naya geometriya [Differential geometry]. Moscow, 1974. 176 p.
  2. Finikov C. P. Teoriya poverkhnostey [The Theory of surfaces]. Leningrad, 1934. 205 p.
  3. Chetvertukhin N. F. Metody geometricheskikh postroeniy [Methods of geometrical constructions], Moscow, 1952. 147 p.
  4. Zamyatin A.V., Zamyatina E.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4-2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1233/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1233/).
  5. Zamyatin A.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2010, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/233/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/233/).
  6. Vygodskiy M. Ya. Differentsial'naya geometriya [Differential geometry]. Moscow – Leningrad, 1949. 511 p.
  7. Bilimovich A. D. O gaussovoy krivizne [About Gaussian curvature], Kiev, 1904. 220 p.
  8. Letnikov A.V. O krivizne poverkhnosti v dannoy tochke [About curvature of a surface in this point]. Moscow, 1868. 140 p.
  9. Forsyth A. Lectures on the differential geometry of surfaces, Cambridge, 1920. 564 p.
  10. Cesaro E. Vorlesungen uber naturliche Geometrie, Leipzig, 1901. 351 p.
-